Polinoame

Forma algebrică a unui polinom este:

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ - sunt **coeficienții** polinomului

și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1)$ **suma coeficienților**

a_n -este numit **coeficientul dominant**,
iar **cel mai mare exponent n, nenul** al lui X,
este numit **gradul lui f**, scriem : n =grad f

a_0 -este numit **termenul liber** și $a_0 = f(0)$

Cu polinoame se pot efectua toate operațiile permise.

Egalitatea polinoamelor
Două polinoame sunt egale dacă :
- au **grade egale**
- au **coeficienții** corespunzători gradelor, respectiv **egali**

Împărțirea cu rest

Dacă se împart polinoamele f și g se obține q- câtul și r-res

$$f = gq + r \ \text{ și } \ grad\ r < grad\ g$$

Dacă r =0 , avem f=gq , spunem că **f este divizibil cu g.**

Dacă **g =X-a** , avem **r = f(a)** –formula restului

f este divizibil cu **X-a** dacă și numai dacă **f(a) =0** T. lui Be

f este divizibil cu $(X-a)^2$ dacă și numai dacă **f(a) =0 și f '(a)**

(se poate generaliza)

f este divizibil cu **(X-a)(X-b)** dacă și numai dacă **f(a) =0** și **f**

În celelalte cazuri se efectuează împărțirea

Pentru împărțirea cu X-a, este utilă Schema lui Ho

Dacă **f(a)=0** spunem că
a este **o rădăcină** a polinomului f, caz în care f **este divizibil** cu **(X-a)**

Dacă $f \in R[X]$ și **a+bi** este **o rădăcină** a lui f ,atunci și **a-bi** **este rădăcină** a lui f , cu același ordin de multiplicitate
Dacă $f \in Q[X]$ și $a+\sqrt{b}$ este **o rădăcină** a lui f ,atunci și $a-\sqrt{b}$ **este rădăcină** a lui f , cu același ordin de multiplicita

Dacă $f \in Z[X]$ și $\frac{\alpha}{\beta}$ este o rădăcină a lui f, atunci α este divizor al termenului liber și β divide coeficientul domina
În acest caz, eventualele rădăcini întregi se află printre divizorii termenului liber.

Relațiile lui Viete

Fie polinomul f ,care are rădăcinile x_1, x_2, x_3

$$f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

Au loc:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Se mai scrie $f = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3$

Fie polinomul f ,care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4

$$f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

Au loc:

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_3}{a_4} \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{a_2}{a_4} \\ s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{a_1}{a_4} \\ s_4 = x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Se mai scrie $f = X^4 - s_1X^3 + s_2X^2 - s_3X + s_4$

Uneori se utilizează

Relațiile lui Newton

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n$$

Cazul n=3

$$\begin{cases} a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0 \\ a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = 0 \\ a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Se adună pe coloană $\longrightarrow S_3$

Cazul n=4

$$\begin{cases} a_4x_1^4 + a_3x_1^3 + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0 \\ a_4x_2^4 + a_3x_2^3 + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = 0 \\ a_4x_3^4 + a_3x_3^3 + a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = 0 \\ a_4x_4^4 + a_3x_4^3 + a_2x_4^2 + a_1x_4 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Se adună pe coloană $\longrightarrow S_4$