13 februarie 2021 Lect. dr. Anca GRAD

Reprezentări grafice ale funcţiilor

A. Asimptote - breviar teoretic

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$.
Observaţie: Asimptotele ataşate oricărei funcţii se determină analizând limitele funcţiei f în punctele de acumulare ale domeniului de definiţie, care nu aparţin domeniului, deci din mulţimea

$$D' \backslash D.$$

Reamintim definiţia mulţimii punctelor de acumulare

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D\backslash\{x_0\} \neq \emptyset \right\}.$$

O submulţime V a lui $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$ este vecinătate a lui x_0 (deci $\in \mathcal{V}(x_0)$) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \exists\, r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$;
- $x_0 = \infty$ $\quad \exists r > 0$ astfel încât $(r, \infty] \subseteq V$;
- $x_0 = -\infty$ $\quad \exists r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r) \subseteq V$;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru $\pm\infty$), obţinem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulţimi. Astfel

$$\begin{aligned} \text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' \iff \quad & \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D\backslash\{x_0\} \neq \emptyset \\ \infty \in D' \iff \quad & \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset \\ -\infty \in D' \iff \quad & \forall r > 0, \quad [-\infty, r) \cap D \neq \emptyset \end{aligned}$$

Observaţie:

- Dacă D este nemărginită inferior, atunci $-\infty \in D'$.
- Dacă D este nemărginită superior, atunci $\infty \in D'$.
- Dacă $x_0 \in D$, dar **nu este punct izolat** atunci $x_0 \in D'$, deci $D\backslash IzoD \subset D'$.
- De cele mai multe ori, chiar şi pentru mulţimi mărginite, $D'\backslash D \neq \emptyset$.
- Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci
  - dacă $(a, b] \in D$, atunci $a \in D'\backslash D$;
  - dacă $[a, b) \in D$, atunci $b \in D'\backslash D$;
  - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a, b \in D'\backslash D$.

Studiind limitele funcţiei f către ∞ şi respectiv $-\infty$ putem obţine în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcţiei f. Astfel, diferenţiem:

- **Asimptote orizontale**
  - Dacă D este nemărginită inferior (deci $-\infty \in D'$), se verifică existenţa

    $$a := \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

    Dacă $\exists a \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie

    $$y = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

    este **asimptota orizontală către** $-\infty$ a funcţiei f.
  - Dacă D este nemărginită superior (deci $\infty \in D'$), se verifică existenţa

    $$b := \lim_{x\to\infty} f(x).$$

    Dacă $\exists b \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie

    $$y = b = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

    este **asimptota orizontală** către ∞ a funcţiei f.
- **Asimptote oblice** (se verifică existenţa lor doar atunci când nu există cele orizontale)
  - Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

    $$m := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

    Dacă $m \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

    $$n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right).$$

    Atunci, dreapta de ecuaţie

    $$y = mx + n$$

    este **asimptota oblică către** $-\infty$ a funcţiei f.
  - Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm

    $$m' := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

    Dacă $m' \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$

    $$n' = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m'x\right).$$

    Atunci, dreapta de ecuaţie

    $$y = m'x + n'$$

    este **asimptota oblică către** ∞ a funcţiei f.

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate fie în mulţimea

$$\Big(D'\backslash D\Big)\cap\mathbb{R},$$

fie în pucte din D, dar în care funţia are o schimbare de formulă (de exemplu la interseţia a două ramuri).

În fapt, aceste puncte sunt de obicei(dar nu numai) capetele reale ale intervalelor deschise incluse în D. Fiecare astfel de punct trebuie analizat în parte. Astfel, pentru fiecare

$$x_0\in\Big(D'\backslash D\Big)\cap\mathbb{R},$$

se analizează limitele laterale ale lui f în x_0.

  - Dacă
  $$\exists\quad f(x_0-0)=\lim_{x\uparrow x_0}f(x_0)\in\{\pm\infty\}.$$
  atunci dreapta de ecuaţie
  $$x=x_0$$
  este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcţiei f.
  - Dacă
  $$\exists\quad f(x_0+0)=\lim_{x\downarrow x_0}f(x_0)\in\{\pm\infty\}.$$
  atunci dreapta de ecuaţie
  $$x=x_0$$
  este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcţiei f.
  - Dacă
  $$\exists\quad f(x_0-0)=f(x_0+0)\in\{\pm\infty\}.$$
  atunci dreapta de ecuaţie
  $$x=x_0$$
  este **asimptotă verticală** la graficul funcţiei f.

B. Algoritm de abordare al graficului unei funcţii

I. Analiza lui D şi a lui D'

1. Determinarea mulţimii de definiţie
2. Studiul parităţii (simetrie faţă de axa Oy), imparităţii (simetria faţă de origine) sau a periodicităţii.
3. Intersecţia cu axele de coordonate
4. Asimptote
5. Mulţimea de continuitate $C\subseteq D$.

II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate $D_1 \subset D$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate f'.
3. Studierea pentru ficare punct $x_0 \in C \backslash D_1$ a derivatelor laterale la stânga şi la dreapta şi detereminarea
   - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, şi cel puţin una e finită.
   - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite şi diferite.
4. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f'(x) = 0$.
5. Studierea monotoniei şi a punctelor de extrem ale f prin analizarea tabelului de variaţie funcţiei.

III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2, $D_2 \subset D_1$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate de ordinul 2, f''.
3. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f''(x) = 0$.
4. Stabilirea
   - **intervalelor de convexitate**, când $f''(x) \geq 0$;
   - **intervalelor de concavitate**, când $f''(x) \leq 0$;
   - **punctelor de inflexiune** în care derivata de oridinul 2 are o schimbare de semn.

C. Tabelul de variaţie

Tabelul se structurează pe patru linii:

Linia 1 cuprinde **valorile remarcabile ale lui** $x:$ mulţimea de definiţie D, evidenţierea punctelor din $D \backslash D'$, intersecţia cu axele de coordonate, soluţiile reale ale ecuaţilor $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ şi $f"(x) = 0$, etc.

Linia 2 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f', şi semnului acestei derivate.

Linia 3 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** $f"$, şi semnului acestei derivate de ordin 2.

Linia 4 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f, şi monotoniei acesteia.

D. Aplicaţii

a) Reprezentaţi grafic funcţiile definite prin:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$;

3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$;

4. $f(x) = \dfrac{|1 + x|}{1 + |x|}$;

5. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^2}$;

7. $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

8. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x = 0 \\ \cos x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \\ \sin x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) Analizând reprezentarea grafică, prin discuţie după parametrul $m \in \mathbb{R}$, stabiliţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei

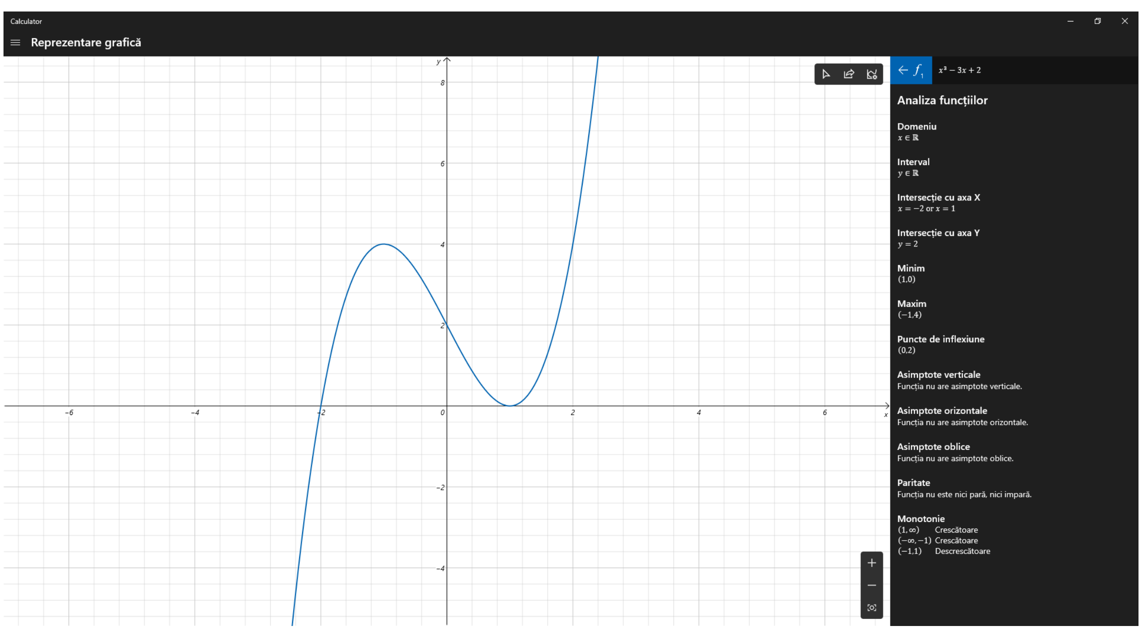
$$f(x) = m,$$

pentru funcţiile 1, 6 şi 7 de la subpunctul a). Indicaţie: translataţi graficul de-a lungul axei Oy.

E. Exemple rezolvate succint

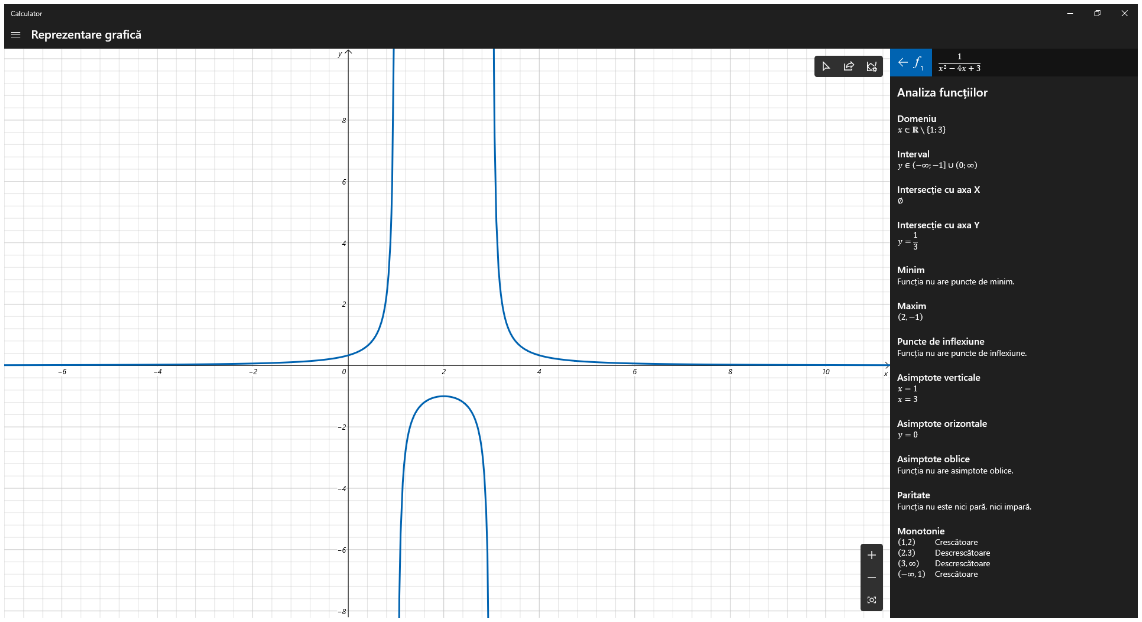
Exemplul 1

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$



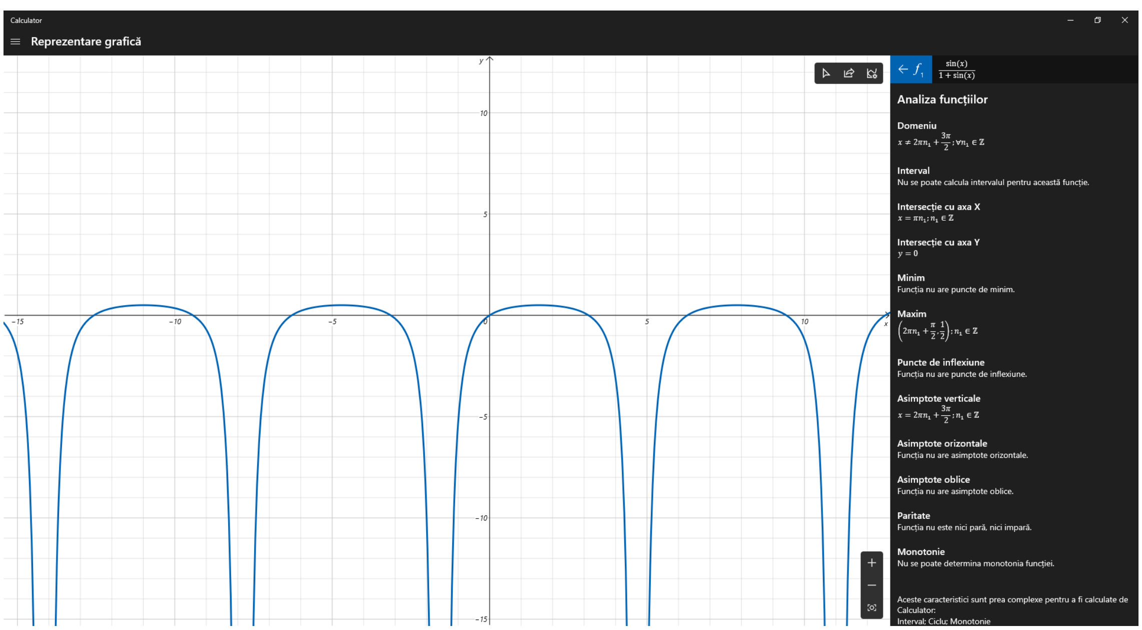
Exemplul 2

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$



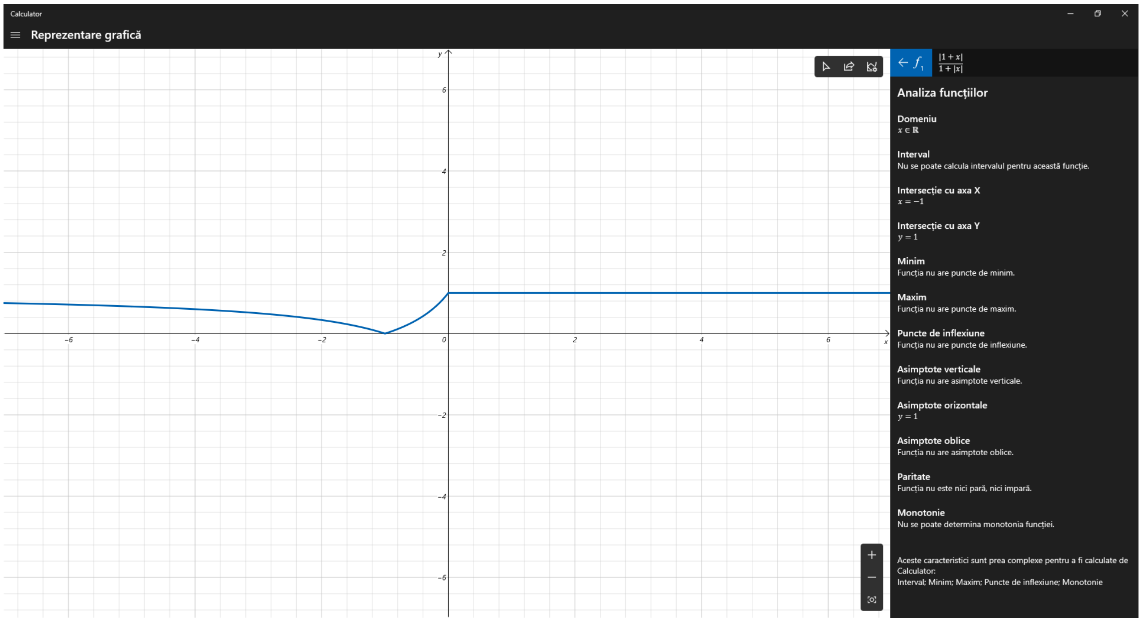
Exemplul 3

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$



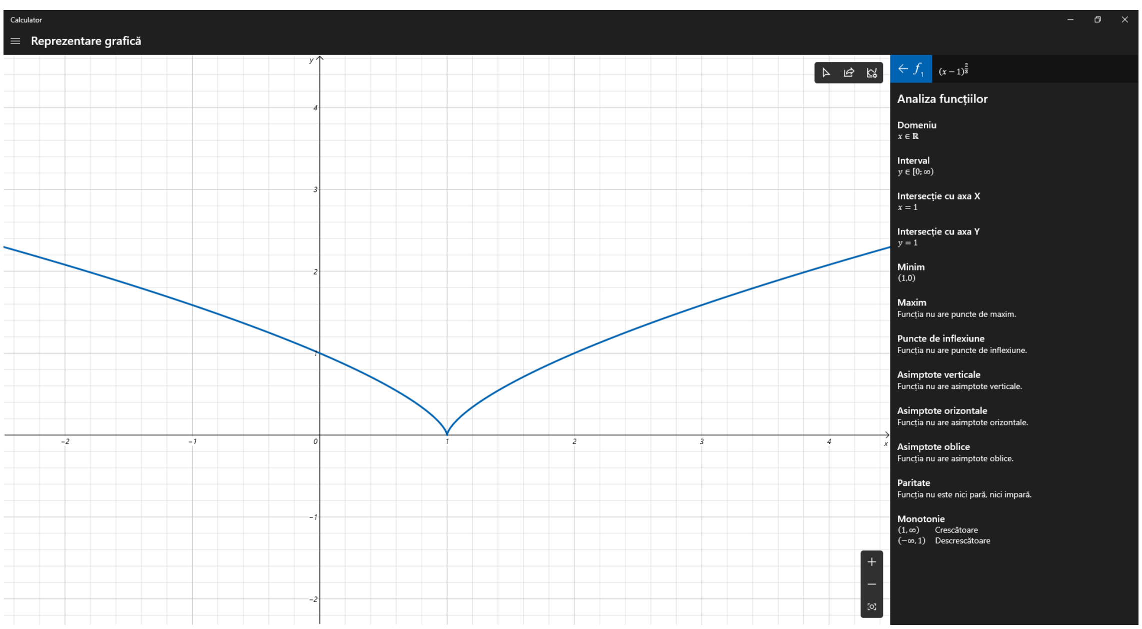
Exemplul 4

$$f(x) = \frac{|1+x|}{1+|x|}$$



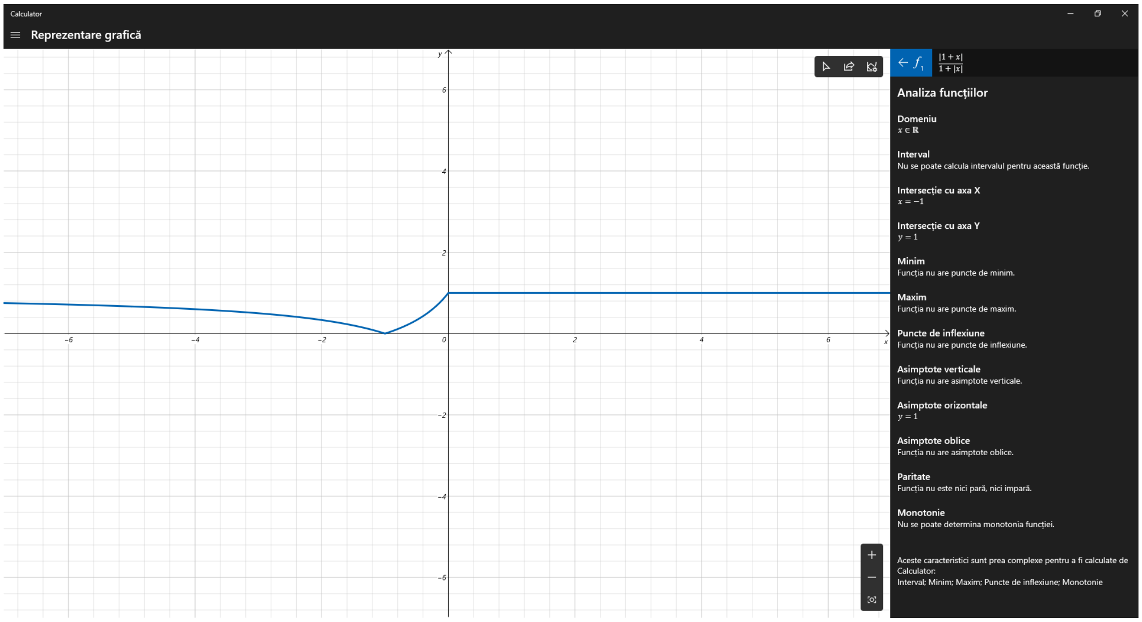
Exemplul 5

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1^2)}$$



Exemplul 6

$$f(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^2}$$



Exemplul 7

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$