



Examenul de bacalaureat național 2020 – simulare județeană

Proba E. c) Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I

(30 puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $z = (1 + i)^{2020} + (1 - i)^{2020}$ este real.
- 5p** 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 6x + 5$.
- 5p** 3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x-3} = 5 - x$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de trei cifre acesta să fie cub perfect.
- 5p** 5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $A(-2,3)$ și dreapta $d: x - y = 0$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de dreapta d .
- 5p** 6. Dacă $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ și $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 3$ să se afle $\operatorname{ctg}2x$.

Subiectul II

(30 puncte)

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Arătați că A are rangul 3.
- 5p** b) Calculați B^n , unde $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p** c) Să se arate că $A^{2001} = I_3 + 2001 \cdot B + 1000 \cdot 2001 \cdot B^2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă „ $*$ ” prin $x * y = 2xy + 2x + 2y + 1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Să se arate că $x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se arate că există o infinitate de numere $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.
- 5p** c) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $x^{2020} = 1 + 2 + \dots + 2^{2018}$, unde $x^n = x * x * \dots * x$, de n -ori, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Subiectul III

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.
- 5p** b) Să se arate că funcția f este inversabilă.
- 5p** c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$
2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n \sin x$.
- 5p** Calculați $\int_0^{\pi/2} f_1(x) dx$;
- 5p** a) Calculați $\int_0^{\pi} f_3'(x) \cdot f_3(x) dx$;
- 5p** b) Demonstrați că $\int_0^1 f_{2019}(x) dx \leq \frac{1}{2020}$;