ROZICA ŞTEFAN
VALERIA BUDUIANU
CĂLINA-CRISTINA IRIMIE
VIORICA BAIBARAC
OANA-DANA CIORĂNEANU
DANA-MARGA RADU

MATEMATICĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ – clasa a VIII-a
Ghid de pregătire

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ

NICULESCU

Cuprins

PARTEA ÎNTÂI
Breviar teoretic

ALGEBRĂ

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

Notând cu D deîmpărțitul, cu I împărțitorul, cu C câtul și cu R restul, avem:

$$D = I \times C + R,\ R < I.$$

MULȚIMI

- O mulțime este o grupare de elemente distincte.
- Mulțimile se notează cu litere mari.
- O mulțime poate să nu aibă niciun element (mulțimea vidă $\varnothing$), să aibă un număr finit de elemente sau poate să aibă un număr infinit de elemente.

Operații cu mulțimi

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\};$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\};$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\};$$

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}.$$

MEDII

Media aritmetică

Pentru numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n, n \geq 2$, avem:

$$M_{\text{aritmetică}} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Media ponderată

Pentru numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n, n \geq 2$ și $p_1, p_2, ..., p_n$ ponderile lor, avem:

$$M_{\text{ponderată}} = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}.$$

Media geometrică sau media proporțională

Pentru numerele reale pozitive a_1, a_2 avem:

$$M_{\text{geometrică}} = \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Divizibilitate

Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b ($b \neq 0$) dacă există un alt număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.

Proprietăți

1) $a \,\vdots\, a$, $(\forall)\, a \in \mathbb{N}^*$;

2) $a \,\vdots\, 1$, $(\forall)\, a \in \mathbb{N}$;

3) $0 \,\vdots\, a$, $(\forall)\, a \in \mathbb{N}^*$;

4) Dacă $n \mid a$ şi $n \mid b$, atunci $n \mid a + b$ şi $n \mid a - b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{N}$;

5) Dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}^*$;

6) Dacă $a \mid b$, atunci $a \mid b \cdot c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Criterii de divizibilitate

Se dă numărul natural $\overline{a_1a_2...a_n}$.

1) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow a_n \,\vdots\, 2$;

2) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_n \in \{0; 5\}$;

3) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow a_n = 0$;

4) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \,\vdots\, 3$;

5) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \,\vdots\, 9$;

6) $\overline{a_1a_2...a_n} \,\vdots\, 4 \Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n} \,\vdots\, 4$.

Puteri

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

- ▶ Un număr natural p se numeşte *pătrat perfect* dacă există un alt număr natural a, astfel încât $p = a^2$.
- ▶ Un număr natural c se numeşte *cub perfect* dacă există un alt număr natural a, astfel încât $c = a^3$.
- ▶ $a^1 = a$ şi $a^0 = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.

Operații cu puteri

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, unde $a, n, m \in \mathbb{N}$;
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, unde $a, n, m \in \mathbb{N}$ și $n \geq m$;
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, unde $a, n, m \in \mathbb{N}$;
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, unde a, b și $n \in \mathbb{N}$.

MULȚIMI DE NUMERE REALE ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)

Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Mulțimea numerelor iraționale $\mathbb{I}$ este mulțimea numerelor care nu se pot scrie sub formă de fracție ordinară $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ (fracțiile zecimale infinite și neperiodice).

Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Mulțimea numerelor reale nenule $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

► Un *raport* este câtul a două numere a și b, scris sub forma $\frac{a}{b}$, cu $b \neq 0$.

► O *proporție* este egalitatea a două rapoarte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cu $b \neq 0$ și $d \neq 0$.

Proprietatea fundamentală a proporției

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Mulțimi direct proporționale

Două mulțimi $\{a, b, c\}$ și $\{n, m, p\}$ sunt direct proporționale dacă $\frac{a}{n} = \frac{b}{m} = \frac{c}{p} = k$, unde k se numește factor de proporționalitate.

Două mulțimi $\{a,\ b,\ c\}$ și $\{n,\ m,\ p\}$ sunt invers proporționale dacă $a \cdot n = b \cdot m = c \cdot p$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții raționale

- $\overline{a,b} = \dfrac{\overline{ab}}{10}$;
- $\overline{a,bc} = \dfrac{\overline{abc}}{100}$;
- $\overline{a,(b)} = \dfrac{\overline{ab} - a}{9}$;
- $\overline{ab,(c)} = \dfrac{\overline{abc} - \overline{ab}}{9}$;
- $\overline{a,(bc)} = \dfrac{\overline{abc} - a}{99}$;
- $\overline{a,b(c)} = \dfrac{\overline{abc} - \overline{ab}}{90}$;
- $\overline{a,b(cd)} = \dfrac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{990}$;
- $\overline{a,bc(d)} = \dfrac{\overline{abcd} - \overline{abc}}{900}$.

Procente

O fracție rațională cu numitorul 100 se numește *procent*.

1) Aflarea unui procent dintr-un număr:

$$p\% \text{ din } a = \frac{p}{100} \cdot a$$

2) Aflarea unui număr când cunoaștem un procent din el:

$$p\% \text{ din } x \text{ este } b \Leftrightarrow \frac{p}{100} \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{100b}{p}$$

3) Aflarea raportului procentual:

$$x\% \text{ din } a \text{ este } b \Leftrightarrow \frac{x}{100} \cdot a = b \Leftrightarrow x = \frac{100b}{a}$$

PROBABILITĂȚI

Fie A un anumit eveniment. *Probabilitatea* realizării evenimentului A (notată *P(A)*) este raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor total posibile realizării acelui eveniment.

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile evenimentului } A}{\text{numărul cazurilor posibile}}, 0 \le P(A) \le 1$$

PARTEA A DOUA
Exerciții
şi probleme recapitulative
din clasele V-VII

CLASA A V-A

1. Câte numere naturale se găsesc în șirurile de mai jos?

a) 0, 1, 2, 3, ..., 27;
b) 1, 2, 3, ..., 35;
c) 7, 8, 9, ..., 52;
d) 0, 2, 4, 6, ..., 28;
e) 27, 30, 33, ..., 123;
f) 1, 3, 5, 7,..., 57;
g) 35, 37, 39, ..., 125;
h) 13, 16, 19, ..., 301.

2. Câte cifre au numerele următoare?

a) 1234 ... 910111213 ... 99100101 ... 251;
b) 27282930 ... 99100101 ... 372;
c) 128129130 ... 99910001001 ... 1341;
d) 137213731374 ... 9999.

3. Aflați a 230-a cifră a numerelor următoare:

a) 1234 ... 910111213 ... 99100101 ... 576;
b) 89101112 ... 99100101 ... 452453;
c) 272829 ... 99100101 ... 375376;
d) 112113114 ... 759760761.

4. Să se efectueze:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 56$;
b) $15 + 16 + 17 + \ldots + 231$;
c) $2 + 4 + 6 \ldots + 124$;
d) $12 + 15 + 18 + \ldots + 321$;
e) $5 + 9 + 13 + \ldots + 401$;
f) $16 + 21 + 26 + \ldots + 521$.

5. Efectuați:

a) $27 \cdot 52 + 27 \cdot 48$;
b) $125 \cdot 14 + 125 \cdot 16 + 125 \cdot 10$;
c) $31 \cdot 24 + 31 \cdot 26 - 50 \cdot 30$;
d) $72 \cdot 74 - 72 \cdot 64 - 10 \cdot 62$;
e) $35 \cdot 24 - 24 \cdot 25 + 10 \cdot 26$;
f) $38 \cdot 39 + 39 \cdot 12 - 50 \cdot 19 - 20 \cdot 49$.

6. Dacă $a + 2b = 39$ și $b + 3c = 60$, atunci calculați:

a) $a + 3b + 3c$;
b) $2a + 5b + 3c$;
c) $a + 4b + 6c$;
d) $3a + 8b + 6c$.

7. Suma a două numere naturale este 36, iar diferența lor este 12. Să se afle cele două numere.

8. Media aritmetică a două numere naturale este egală cu 38. Dacă un număr este de trei ori mai mare decât celălalt, să se afle cele două numere.

9. Media aritmetică a trei numere naturale este 42. Dacă media aritmetică a primelor două numere naturale este 39 și media aritmetică a ultimelor două este 45, să se afle cele trei numere.

10. O papetărie a primit pentru vânzare pixuri de trei culori: albastre, roșii și verzi. Dintre acestea 63 nu sunt albastre, 79 nu sunt roșii și 88 nu sunt verzi. Aflați câte pixuri de fiecare culoare a primit papetăria.

11. Într-o gospodărie sunt găini și oi. În total sunt 68 de capete și 160 de picioare. Câte găini și câte oi sunt în gospodărie?

12. Într-un bloc sunt 40 de apartamente cu două sau trei camere. Dacă în total sunt 104 camere, aflați câte apartamente cu trei camere sunt în bloc.

13. Dacă elevii unei clase se așază câte unul în bancă, rămân 7 elevi în picioare, iar dacă se așază câte 2 elevi în bănci, un elev se așază singur în bancă și rămân 5 bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?

14. Dacă elevii unei clase se așază câte 2 în bancă, rămân 7 bănci libere. Dacă se așază câte 3 în bănci, un elev stă singur în bancă și rămân 11 bănci libere. Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?

15. Suma a două numere naturale este 80. Dacă împărțim un număr la celălalt obținem câtul 2 și restul 8. Să se afle numerele.

16. Diferența a două numere naturale este 37. Dacă împărțim un număr la celălalt obținem câtul 2 și restul 18. Aflați numerele.

17. Un număr este cu 68 mai mare decât altul. Dacă împărțim suma numerelor la diferența lor obținem câtul 8 și restul 52. Să se afle numerele.

18. Să se afle cel mai mare număr natural care împărțit la 15 dă restul egal cu dublul câtului.

19. Să se afle cel mai mare număr natural care împărțit la 56 dă câtul mai mic decât restul.

20. Care este cel mai mic număr natural de trei cifre care împărțit la 15 dă restul 13?

21. Câte numere naturale de trei cifre au proprietatea că, împărțite la 16, se obține restul 15?

22. Câte numere naturale dau câtul 56 la împărțirea cu 2 017?

23. Aflați restul împărțirii numărului:

a) $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,017 + 36$ la 56;
b) $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,017 + 65$ la 56;
c) $p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,018 + 2\,017$ la 156;
d) $q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2\,018 + 2\,016$ la 1 056.

24. Scrieți mulțimea divizorilor numerelor:

a) 19; b) 25; c) 16; d) 36; e) 180.

25. Scrieți mulțimea multiplilor numărului 6 mai mari decât 15 și mai mici decât 71.

26. Aflați numărul natural x, știind că:

a) $x - 2 \mid 8$; b) $x + 1 \mid 18$; c) $2x + 1 \mid 27$; d) $2x - 3 \mid 15$.

27. Aflați mulțimea divizorilor numerelor:

$a = 1 + 2 + 3 + ... + 21$;
$b = 2 + 4 + 6 + ... + 12$;
$c = 15 + 18 + ... + 63$;
$d = 17 + 21 + ... + 41$.

28. Câte numere naturale divizibile cu 2 sunt de forma:

a) $\overline{a4}$; b) $\overline{ab4}$; c) $\overline{a5b}$; d) $\overline{7ab}$?

29. Câte numere naturale divizibile cu 3 sunt de forma:

a) $\overline{a6}$; b) $\overline{a5}$; c) $\overline{ab6}$; d) $\overline{5ab}$?

30. Demonstrați că:

a) $\overline{x2} + \overline{2x}$ se divide cu 11;
b) $\overline{x03} + \overline{30x}$ se divide cu 101;
c) $\overline{xy} + \overline{xy0} + \overline{x0y}$ se divide cu 6;
d) $\overline{x1y} + \overline{1yx} + \overline{yx1}$ se divide cu 111.

31. Aflați ciferele x și y astfel încât $\overline{3x} + \overline{7y}$ să fie multiplu de 5.

32. Demonstrați că:

a) $10 \mid 2a + 7b$ dacă și numai dacă $10 \mid 8a + 3b$;
b) $5 \mid 3a + 2b$ dacă și numai dacă $5 \mid 8a + 7b$;
c) $3 \mid 2a + b$ dacă și numai dacă $3 \mid a + 2b$;
d) $2 \mid 7a + 3b$ dacă și numai dacă $2 \mid a - 5b$.

33. Determinați numerele naturale a și b care verifică relația:

a) $2a + 5b = 40$; b) $3a + 5b = 45$.

34. Aflați numerele naturale n, știind că:

a) $n + 1 \mid n + 13$; b) $n + 2 \mid n + 20$;
c) $n + 3 \mid 2n + 16$; d) $n + 1 \mid 3n + 12$;
e) $2n + 1 \mid 3n + 9$; f) $4n + 1 \mid 6n + 15$.

35. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $2x - 1 = 9$;
b) $3(x - 2) + 8 = 20$;
c) $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3}{2}$;
d) $24 + 5 \cdot [12 + 2 \cdot (x + 5)] = 224$;
e) $\{[(27 - 7) : 4 + 5 \cdot 3] : 10\} : x = 2$.

36. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $x + 2 \leq 5$; b) $3x - 2 < 7$; c) $5 - x > 3$;
d) $12 + 3 \cdot [16 - 2 \cdot (x + 2)] \geq 24$.

37. Efectuați:

a) $1^{2017} + 2017^0 + 0^{2016} + 2016^1$;
b) $(5^2 + 4^2) : 41$;
c) $(2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^2) : 21$;
d) $(2^4 + 2^3 - 2^2 - 2^1) : 3^2$;
e) $(3^8 - 3^7) : 3^6$;
f) $2^7 \cdot 2^3 - 2^{10}$;
g) $(5^4)^{26} : (5^5)^{20} : 125$;
h) $(3 + 5)^4 : 2^8$.

38. Aflați suma cifrelor numărului:

a) $a = 2^7 \cdot 5^6 + 1$;
b) $b = 2^8 \cdot 5^9 + 2$;
c) $c = 2^{12} \cdot 5^{11} - 1$;
d) $d = 2^{16} \cdot 5^{17} - 5$.

39. Arătați că suma $S = 1 + 3 + 5 \ldots + 2\,017$ este pătrat perfect.

40. Dacă $2\,017 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2\,016) = n^2$, aflați numărul natural n.

41. Determinați numerele naturale de forma $\overline{2x7y}$ divizibile cu 6.

42. Comparați numerele 3^{74} și $2^{113} - 2^{112} - 2^{111}$.

43. Aflați ultima cifră a următoarelor numere:

a) $n = 2^3 \cdot 2^6 \cdot 2^9 \cdot \ldots \cdot 2^{300}$;
b) $m = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016}$;
c) $p = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{2017}$;
d) $q = 7^2 + 7^4 + 7^6 + \ldots + 7^{2016}$.

44. Arătați că numărul

a) $n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2016}$ este divizibil cu 15;
b) $m = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2015}$ este divizibil cu 13;
c) $p = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{2015}$ este divizibil cu 25;
d) $q = 6^0 + 6^2 + 6^4 + 6^6 + \ldots + 6^{2018}$ este divizibil cu 37.

45. Arătați că în următoarele cazuri numărul n este cub perfect:

a) $n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^8$;
b) $n = 125 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 124)$;
c) $n = 3^2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 125) : 7^2$.

46. Aflați numărul natural x, știind că:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$;
b) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x+4} = 819$;
c) $2^{x+2} + 2^{x+4} + 3 \cdot 2^{x+6} = 424$;
d) $5 \cdot 3^{x+1} + 8 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+3}) = 180$.

47. a) Scrieți numărul 5^9 ca o sumă de două pătrate perfecte.
b) Scrieți numărul 9^{37} ca o diferență de două pătrate perfecte.
c) Scrieți numărul 9^{37} ca o sumă de două cuburi perfecte.
d) Scrieți numărul 74^6 ca o diferență de două cuburi perfecte.

48. Câte numere de forma celor de mai jos există în fiecare caz în parte?

a) $\overline{31a}$; b) $\overline{a72}$; c) $\overline{ab40}$; d) $\overline{a13b}$.

49. Scrieți toate numerele de trei cifre care se pot forma cu cifrele 1, 6 și 0.

50. Scrieți toate numerele de trei cifre care se pot forma cu cifrele 1, 2, 3.