Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2021

13 martie 2021 Conf. dr. habil. Brigitte Breckner

Integrale

1. Fie a, $b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii.

A: *Dacă* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă cu proprietatea că* $f(x) > 0$, *oricare ar fi* $x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

B: *Dacă* g, $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue cu proprietatea că* $g(x) < h(x)$, *oricare ar fi* $x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \int_a^b h(x)\mathrm{d}x$.

C: *Dacă* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, care nu este identic nulă şi pentru care* $f(x) \geq 0$, *oricare ar fi* $x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

2. Fie a, $b \in \mathbb{R}$ cu $0 < a < b$. Să se arate că $\int_a^b x^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x < \int_a^b \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametru şi $f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}.$$

a) Să se determine $\int f(x)\mathrm{d}x$.

b) Notând cu $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f, să se determine mulţimea M formată din toate valorile lui α pentru care funcţia F are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^{2021}+1}\mathrm{d}x, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se calculeze a_{2020}.

b) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

c) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.