

Continuitate și derivabilitate

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și fie $f : (-1, 1) \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in (-1, 1) \setminus \{a\} \\ -x & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale funcției f .

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, al cărei grafic admite asimptote orizontale spre $-\infty$ și spre $+\infty$. Să se demonstreze că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) = c$.

3. Să se calculeze derivatele de ordin superior ($f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) pentru funcțiile:

a) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)^x$.

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(\alpha x + \beta)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$$

pentru orice număr real $x > 0$.

5. Fie $a \in (0, +\infty)$ și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} a^{1/x} & \text{dacă } x < 0 \\ x^a & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Studiați continuitatea funcției f .
b) Studiați derivabilitatea funcției f .
c) Determinați toate punctele de extrem local ale funcției f .
d) Determinați toate punctele de extrem global ale funcției f .