Consultații pentru elevii de liceu

Structuri algebrice I: Grupuri

O operație pe o mulțime G este o funcție

$$*: G\times G \to G$$

$G\times G = \{(x,y) \mid x,y\in G\}$ $\qquad (x,y) \mapsto x*y \in G.$

Un grup este o structură $(G,\cdot)$ unde G este o mulțime și $\cdot$ o operație pe G a.î. pt orice $x,y,z\in G$

(1) Asociativ. $(x\,y)z = x(y\,z)$

(2) $\exists\, 1\in G$ a.î. $x\cdot 1 = x = 1\cdot x$

(3) $\exists\, x^{-1}\in G$ a.î. $x\cdot x^{-1} = 1 = x^{-1}\cdot x$

- Elementul neutru, dacă există este unic.
- În prezența asociativității dacă există inversul lui x, atunci el este unic
- $(G,\cdot)$ și $x\in G$: $(x^{-1})^{-1} = x$

  $y\in G$ $\qquad (x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$

Un grup se zice abelian (sau comutativ) dacă $x,y\in G$:

Comut. $\quad x\cdot y = y\cdot x$

Ex. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ $\qquad$ grupuri abeliene

$(\mathbb{N},+)$ nu este grup pt. că $x=2$ $\nexists\, -x\in\mathbb{N}$: $2+(-\cancel{x}) = 0$

$\forall x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ $\nexists\, -x\in\mathbb{N}$.

(altfel spus $\forall y\in\mathbb{N}$ $\quad x+y\neq 0$)

$(\mathbb{Z},\cdot)$ nu este grup $\quad x=2$ $\quad \nexists\, x^{-1}\in\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Q},\cdot)$ nu este grup $\quad \nexists\, 0^{-1}$

Un morf între două grupuri $(G,\cdot)$ și $(H,\cdot)$ este o funcție $f: G\to H$ cu prop. $f(xy) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in G$. Dacă în plus f este bij atunci $G\cong H$. (f este izomorfism)

Probleme propuse

1. Fie $G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

(a) Arătați că operația $\circ : G \times G \to G$, $x \circ y = x^{\ln y}$ este bine definită.

(b) Arătați că $(G, \circ)$ este un grup abelian

(c) Să se determine un izomorfism de la G la $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

2. Notăm $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ și $G = \{ A(x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \}$.

(a) Arătați că G este un grup abelian în raport cu înmulțirea matricilor

(b) Arătați că $GL_3(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricilor

(c) Este G un subgrup al lui $GL_3(\mathbb{R})$?

3. Să se arate că grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ are exact un subgrup U_n cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ este un număr dat. Găsiți un izomorfism de la U_n la $(\mathbb{Z}_n, +)$.

4. Să se arate că următoarele perechi de grupuri nu sunt izomorfe:

a) $(\mathbb{Z}_2, +)$ și $(\mathbb{Z}_3, +)$

b) $(\mathbb{Z}_4, +)$ și $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

c) $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

d) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Soluții. (1) $\forall\, x, y \in G = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ există $\ln y \in \mathbb{R}$ deci există $x^{\ln y} \in (0, \infty)$. Dar dacă $x \neq 1$ și $y \neq 1 \Rightarrow \ln y \neq 0$. Din inj. funcției exponențiale cu baza $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ avem $x^{\ln y} \neq x^0 = 1$. Deci $x \circ y = x^{\ln y} \in G$.

(2). $x, y \in G \qquad x \circ y = x^{\ln y} = e^{\ln (x^{\ln y})} = e^{\ln y \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln y}$

Asociat. $x, y, z \in G$: $(x \circ y) \circ z = \left(e^{\ln x \ln y}\right) \circ z = e^{(\ln x \ln y) \ln z}$

$x \circ (y \circ z) = x \circ \left(e^{\ln y \ln z}\right) = e^{\ln x (\ln y \ln z)}$

Com. $x, y \in G \qquad x \circ y = e^{\ln x \ln y} = e^{\ln y \cdot \ln x} = y \circ x$

Caut $u \in G$ a.i. $u \circ x = x \iff e^{\ln u \cdot \ln x} = x = e^{\ln x} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln u \cdot \ln x = \ln x \\ x \neq 1 \Rightarrow \ln x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\ln u = 1 \Rightarrow u = e.$

Fix $x \in G$; caut $x' \in G$ a.i. $x \circ x' = e \iff e^{\ln x \cdot \ln x'} = e \iff$

$\ln x \cdot \ln x' = 1 \Rightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} = (\ln x)^{-1} \Rightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G.$

(3) $f : G = (0, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \ln x$ bij.

$f(x \circ y) = \ln (x \circ y) = \ln\left(e^{\ln x \cdot \ln y}\right) = \ln x \cdot \ln y = f(x) \cdot f(y).$

(2). (a) $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$, $A(y) = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+2xy & 0 & x+y-2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ x+y-2xy & 0 & 1-x-y+2xy \end{pmatrix} = A(x+y-2xy). \quad (*)$

$(1-x)\cdot(1-y) + xy = 1 - x - y + xy + xy \qquad x+y-2xy = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-y\right) + \frac{1}{2}$

Inmultirea matricilor induce o operatie pe G daca si numai

daca $A(x) \cdot A(y) \in G$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \iff x+y-2xy \neq \frac{1}{2} \iff$

$2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-y\right) + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ adev. pt. ca $\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{\neq 0}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-y\right)}_{\neq 0} \neq 0.$

Asociativitatea este automat verificata pt. operatia este inmultirea matr.

Comut. $A(x) \cdot A(y) = A(x+y-2xy) = A(y) \cdot A(x)$

Căutăm $A(u)$ a.î. $A(u)\cdot A(x) = A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$$A(u+x-2ux) = A(x) \Rightarrow u+\cancel{x}-2ux=\cancel{x}$$

$$\Rightarrow u(1-2x)=0 \Rightarrow u=0.$$

Deci $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ este elem neutru în G.

Fie $A(x)\in G$; caut $A(x')\in G$ a.î. $A(x)\cdot A(x') = A(0)$

$$A(x+x'-2xx') = A(0) \Rightarrow x+x'-2xx'=0$$

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-x'\right)+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-x'\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\cancel{2}\cdot\frac{1-2x}{\cancel{2}}} =$$

$$\frac{1}{2}-x' = \frac{1}{2(1-2x)} \Rightarrow x' = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(1-2x)} = \frac{\cancel{1}-2x-\cancel{1}}{2(1-2x)} = -\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(1-2x)}$$

Deci $(G,\cdot)$ este un grup.

(3). $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ grup.

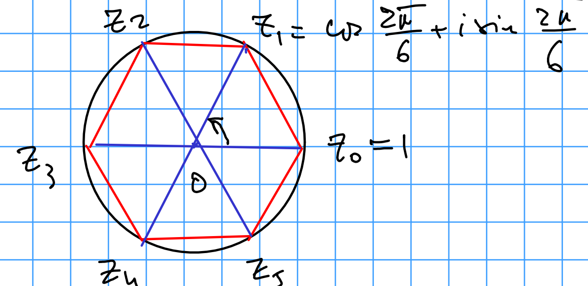
Proprietate: $(G,\cdot)$ grup finit $|G|=n$ atunci $\forall x\in G$: $x^n=1$.

Dacă G este un subgrup cu n elemente a lui $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ atunci elem. lui G trebuie să satisfacă prop. de mai sus deci trebuie să fie rădăcini de ordinul n ale unității.

Sol. ec. $x^n=1$ în $\mathbb{C}$ sunt:

$$\left\{ z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \;\middle|\; k=0,1,2,\dots,n-1 \right\}$$

$n=6$



$$z_k^n = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$$

$$z_6 = \cos\frac{2\cdot\cancel{6}\cdot\pi}{\cancel{6}} + i\sin\frac{2\cdot\cancel{6}\pi}{\cancel{6}} = z_0$$

$$z_7 = z$$

$$z_1^2 = z_2,\ z_1^3 = z_3,\ \dots,\ z_1^6 = z_0 = 1,\ z_1^7 = z_7 = z_1 \text{ ş.a.m.d.}$$

Notăm $U_n = \{z_k \mid k=0,1,\dots,n-1\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\} = \{z_1^0, z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1}\}$

Verificăm că U_n este un subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$1 = z_0 \in U_n$

$z_k, z_t \in U_n \Rightarrow z_k \cdot z_t = z_{k+t (\bmod n)} \in U_n$

$z_k \in U_n \Rightarrow z_{n-k} \in U_n$ și $z_k \cdot z_{n-k} = z_n = z_0 = 1. \Rightarrow z_{n-k} = z_k^{-1}$ ($z_n \in U_n$)

Funcția $f : U_n \to \mathbb{Z}_n$

x	z_0	z_1	$\dots$	z_{n-1}
$f(x)$	$\hat{0}$	$\hat{1}$		$\widehat{n-1}$

este un izomorfism.

(4) (a) $\nexists\, f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3$ bij. pt. că $|\mathbb{Z}_2| = 2$ și $|\mathbb{Z}_3| = 3$

$\Rightarrow \nexists$ izomorfism

(b). $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$

În $(G, \cdot)$ grup spunem că $x \in G$ este de ordin finit dacă $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^n = 1$; cel mai mic nr. natural nenul cu această prop. este $\mathrm{ord}(x)$. Dacă x nu este de ordin finit el este de ordin infinit.

În $\mathbb{Z}_4$ $\mathrm{ord}(\hat{1}) = 4$ (deci $\mathbb{Z}_4$ este ciclic generat de $\hat{1}$).

În $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ avem $(x, y) + (x, y) = (\bar{0}, \bar{0}) \Rightarrow$ nu există elem. de ordin 4 (nu e ciclic).

Deci $(\mathbb{Z}_4, +)$ și $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ nu sunt izomorfe.