

Polinoame

Introducere

Vom privi polinoamele într-o variabilă din două puncte de vedere:

1. (Intuitiv) Un polinom este o expresie care conține simbolul X și elemente dintr-un inel R (de exemplu \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_n , orice corp), legate între ele prin operații de adunare și înmulțire:

$$P \in R[X], P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

Înzestrăm mulțimea $R[X]$ cu o adunare și o înmulțire, definite astfel încât să respecte regulile aritmetice uzuale:

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

$$Q = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n + \dots + b_mX^m$$

$$P + Q := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \dots + (a_n + b_n)X^n + b_{n+1}X^{n+1} + \dots + b_mX^m$$

$$PQ := (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \dots + (a_nb_m)X^{m+n}$$

2. (Riguros) Un polinom este un șir finit de elemente dintr-un inel R .

- f șir de elemente din R :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow R \iff (f(0), f(1), \dots, f(n), \dots)$$

- f șir finit $\iff \exists n$ astfel încât $\forall k > n : f(k) = 0$
- $(f + g)(i) := f(i) + g(i), \forall i \in \mathbb{N}$;
- $(fg)(i) := \sum_{j=0}^i f(j) \cdot g(i - j)$;
- $(0, 1, 0, 0, \dots) =: X$

Se poate arăta prin inducție că

$$X^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

unde 1 se află pe poziția $n + 1$.

Legătura dintre cele două puncte de vedere este următoarea:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow R \iff P = f(0) + f(1) \cdot X + f(2) \cdot X^2 + \dots + f(n) \cdot X^n$$

$$(0, 1, 0, \dots) \iff P = X$$

$$(a, 0, 0, \dots) \iff P = a$$

Gradul unui polinom

Definiție. Fie R un inel, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in R[X]$, iar $a_n \neq 0$. Definim gradul polinomului f prin $\text{grad}(f) := n$.

- dacă $f = a \neq 0$, atunci $\text{grad}(f) = 0$;
- dacă $f = 0$, atunci $\text{grad}(f) = -\infty$;
- $\text{grad}(f + g) \leq \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$;

$$- (1 + 2X + X^2) + (2 + X^3) = 3 + 2X + X^2 + X^3$$

$$- (1 + X^2) + (X - X^2) = 1 + X$$

- $\text{grad}(fg) \leq \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

– dacă R este inel integru (ex. corp) atunci

$$\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

– în \mathbb{R} (sau \mathbb{Z}): $(2 + 3X + 6X^3)(1 + X^2) = 6X^5 + 9X^3 + 2X^2 + 3X + 2$;

– în \mathbb{Z}_4 : $(\hat{2}X^2 + \hat{3}X)(\hat{2}X^7 + \hat{1}) = \hat{2}X^8 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X$.

Polinoame și funcții polinomiale

În ceea ce urmează vom evidenția diferențele dintre noțiunile de **polinom** și de **funcție polinomială**. Considerăm inelele R și S cu $R \subseteq S$ și polinomul $f \in R[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

Definiție. Pentru fiecare $\alpha \in S$ definim valoarea lui f în α :

$$f(\alpha) := a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n$$

Funcția definită prin

$$\begin{aligned}\tilde{f} : S &\rightarrow S \\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

se numește **funcția polinomială pe S asociată polinomului f** .

Exemple. $f = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$, $R = \mathbb{R}$

- $S = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \\ i &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto 2\end{aligned}$$

- $S = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 1 \\ 1 &\mapsto 2\end{aligned}$$

- $S = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 + I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc + 1 & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 + 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- f poate fi, de exemplu, interpretat și ca un polinom peste \mathbb{Z}_4 , $f = X^2 + \hat{1}$.

Atunci pentru $S = \mathbb{Z}_4$ avem:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \mathbb{Z}_4 \\ \hat{0} &\mapsto \hat{1} \\ \hat{1} &\mapsto \hat{2} \\ \hat{2} &\mapsto \hat{1} \\ \hat{3} &\mapsto \hat{2}\end{aligned}$$

Observație. Două polinoame distincte pot defini aceeași funcție polinomială pe un inel.

Fie $f = X^3 - X$ și $g = X^9 - X$, polinoame cu coeficienți în \mathbb{Z}_3 . Atunci funcțiile polinomiale

asociate acestora sunt:

$$\tilde{f} : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$\hat{0} \mapsto \hat{0}$$

$$\hat{1} \mapsto \hat{0}$$

$$\hat{2} \mapsto \hat{0}$$

$$\tilde{g} : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$\hat{0} \mapsto \hat{0}$$

$$\hat{1} \mapsto \hat{0}$$

$$\hat{2} \mapsto \hat{0}$$

Teorema împărțirii cu rest pentru numere întregi și polinoame peste un corp

\mathbb{Z}	$K[X]$
$\forall a, b \in \mathbb{Z}$	$\forall f, g \in K[X]$
cu $b \neq 0$	cu $g \neq 0$
$\exists! q, r \in \mathbb{Z}$	$\exists! q, r \in K[X]$
a.î. $a = b \cdot q + r$	a.î. $f = g \cdot q + r$
și $0 \leq r < b $	$\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$

Probleme propuse

1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = \alpha^2 - 16 + (\alpha + 4\beta)X + (\beta^2 - 1)X^2$.

Pentru ce valori ale parametrilor $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ polinomul f este polinomul nul?

2. Fie $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = a + bX + cX^2$.

Să se determine polinomul f , știind că \tilde{f} este egală cu funcția polinomială atașată polinomului $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = \hat{2}X^2 - X + \hat{2}$.

3. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul 3, știind că f împărțit la $X^2 + 2X$ dă restul $r_1 = X + 2$ și împărțit la $X^2 - X$ dă restul $r_2 = 7X + 2$.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii lui $f = X^4 - (m^2 - 1)X - 8i$ la $(X + i)$ să fie un număr real.