Libris .RO
Respect pentru oameni și cărți

Sorana **IONESCU**

constrrucțiile auxiliare în rezolvarea problemelor de geometrie plană

Ediția a II-a

Editura Paralela 45

CUPRINS

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

PARTEA ÎNTÂI
SCURTĂ PREZENTARE GENERALĂ

I. Prezentare generală a metodei

Când o problemă de geometrie cere construcţie auxiliară, dificultatea ei crește, provocarea constând în a decide în ce mod să completăm figura dată, astfel încât acest lucru să ne ajute, simplificând demonstrația și nu complicând-o. Folosirea construcției auxiliare indică o înțelegere profundă a geometriei. Desenele sunt elemente pentru cercetare, completarea acestora dovedind dobândirea unor abilități creative foarte importante în rezolvarea problemelor de geometrie.

Prezentăm, in continuare, câteva sfaturi utile în rezolvarea problemelor de geometrie în general și în special în rezolvarea problemelor care necesită construcții auxiliare:

- Când nu găsești răspunsul imediat, încearcă să afli ce poți. Se poate să găsești ceva care să te conducă la concluzie. Mai mult, poți afla ceva mai interesant decât cerința problemei.
- Să rezolvi o problemă în două moduri diferite este o cale foarte bună să verifici corectitudinea soluției.
- Câteodată, utilizarea metodei reducerii la absurd este mult mai ușoară și mai eficientă decât demonstrația directă.
- În probleme mai complicate de geometrie marchează laturile congruente și unghiurile congruente pe măsură ce le descoperi, îndeosebi pe cele care nu sunt evidente.
- Când nu ajungi la rezultat întreabă-te ce informație din ipoteză nu ai folosit.
- Încearcă să rezolvi o problemă mai ușoară, înrudită cu problema dată. Selectează o parte a condițiilor din ipoteză, realizează un desen doar cu aceste date și poate obții ceva folositor.
- Adesea este bine să încerci câteva exemple înainte de a demonstra un rezultat general. Aceste exemple pot fi o bună călăuză în a descoperi răspunsul căutat.
- Uneori, parcurgând întâi drumul înapoi de la concluzie spre ipoteză, vei putea descoperi soluția problemei.
- Dacă nu vezi rezolvarea problemei imediat, nu abandona. Este util să faci câteva observații, scrie alături demonstrațiile acestora și, poate, vei reuși să combini aceste rezultate pentru a completa rezolvarea problemei.

Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

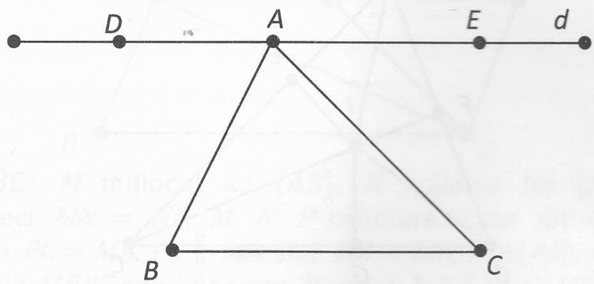
- În problemele de geometrie, explorarea acestora cere să realizezi un desen mare și curat, respectând măsura unghiurilor, lungimile laturilor fiind proporționale cu cele din enunț. Când găsești o nouă informație ar trebui să refaci desenul folosind noile date. Acest fapt te ajută foarte mult în rezolvarea problemei.
- Unind puncte care inițial nu au fost unite poate fi extrem de util. Asta nu înseamnă să unim toate punctele din desen. Caută segmente care pot fi de ajutor în demonstrație, cele care unesc puncte importante sau cele care formează unghiuri, triunghiuri, patrulatere despre care poți afla ceva imediat.
- Dacă ai două dintre liniile importante în triunghi (de același tip), ar trebui să folosești proprietatea punctului de intersecție și să construiești a treia linie de tipul respectiv.
- Când te-ai blocat într-o demonstrație, notează măsura unuia dintre unghiuri cu o variabilă și încearcă să afli alte măsuri de unghiuri în funcție de această variabilă. Formează o ecuație pentru a afla variabila.
- În multe probleme de geometrie există informații ascunse vederii. Prelungind segmente care par să se termine brusc (în special în interiorul unui triunghi sau patrulater) poți obține rezultate deosebite.
- Dreptele paralele sunt utile în problemele care implică unghiuri, deci, uneori, vei adăuga noi drepte paralele în desen.
- Spărgând un unghi, un segment, o suprafață în mai multe părți, de multe ori poți afla informații folositoare demonstrației.
- O construcție auxiliară foarte utilizată este perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă. Scopul tău este să construiești triunghiuri dreptunghice sau dreptunghiuri ale căror proprietăți să le exploatezi în demonstrația ta. De asemenea, poți evidenția distanțele de la un punct al bisectoarei unui unghi la laturile unghiului, folosind faptul că acestea sunt egale.
- Unghiurile cu măsurile de 30°, 60°, 45°, chiar și suplementele lor, sunt adesea bune pentru a construi triunghiuri dreptunghice cunoscute. Poți face acest lucru ducând perpendiculare sau prelungind segmente.
- Dacă, într-o problemă, se dă mijlocul unui segment, este util să evidențiezi mijlocul unui alt segment care are cu segmentul dat un capăt comun, obținând astfel o linie mijlocie într-un triunghi, linie ale cărei proprietăți le vei folosi în rezolvarea problemei.
- Tot în cazul de mai sus, poți construi un segment al cărui mijloc coincide cu mijlocul segmentului dat, obținând astfel un paralelogram de proprietățile căruia vei beneficia în demersul tău pentru obținerea rezultatului.
- Dacă ai utilizat cu succes o anume tactică pentru a obține noi informații, dar nu ai rezolvat încă problema, încearcă să utilizezi aceeași tactică într-o altă situație. Poți obține noi informații utile.

Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

II. Rezultate importante din geometrie ale căror demonstrații se bazează pe construcții auxiliare

Cel mai cunoscut rezultat din geometrie care se demonstrează cu ajutorul construcțiilor auxiliare este următoarea teoremă:

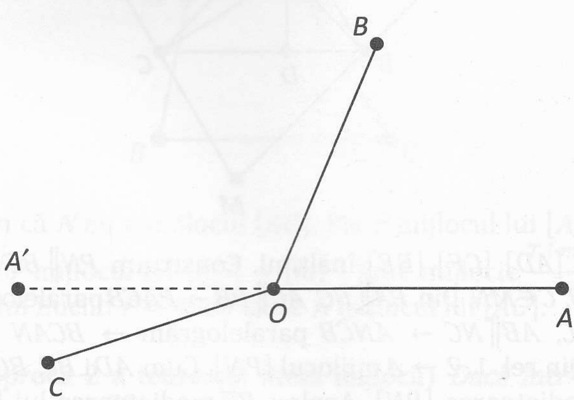
Teorema 1. *Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.*



Dem. Fie ΔABC. Construim prin A o paralelă la BC pe care considerăm punctele D și E astfel încât $[BD] \cap AC = \emptyset$, $A \in (DE)$. Din $DE \parallel BC$ (AB secantă) $\rightarrow$ $\rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{ABC}$ (1) (alterne interne). Din $DE \parallel BC$ (AC secantă) $\rightarrow \widehat{EAC} \equiv \widehat{ACB}$ (2) (alterne interne). Din $m\widehat{DAE} = 180° \rightarrow m\widehat{DAB} + m\widehat{BAC} + m\widehat{CAE} = 180° \xrightarrow{cf.1,2}$ $\xrightarrow{cf.1,2} m\widehat{ABC} + m\widehat{BAC} + m\widehat{ACB} = 180°$.

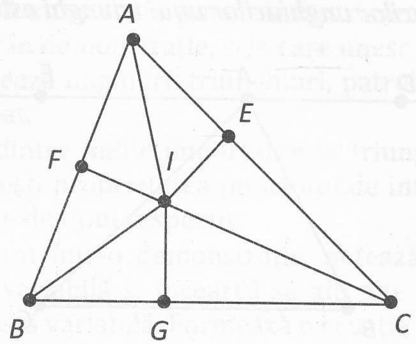
Prezentăm în continuare alte câteva rezultate deosebite care se demonstrează cu ajutorul construcțiilor auxiliare.

Teorema 2. *Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este 360°.*



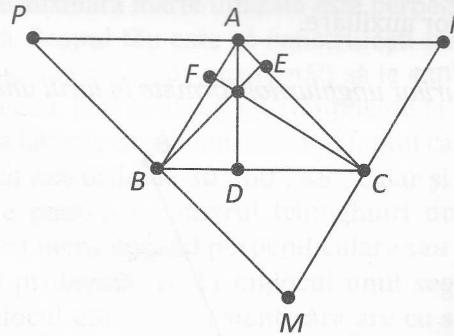
Dem. Demonstrăm teorema pentru cele 3 unghiuri în jurul punctului O din figura alăturată. Teorema se demonstrează asemănător pentru oricâte unghiuri în jurul unui punct. Construim semidreapta $[OA'$ opusă semidreptei $[OA$ (1). Din $A' \in \mathrm{Int}\widehat{BOC} \rightarrow m\widehat{BOC} = m\widehat{BOA'} + m\widehat{A'OC}$. Avem $m\widehat{A'OB} + m\widehat{BOA} = 180°$ (cf. 1), $m\widehat{A'OC} + m\widehat{COA} = 180°$ (cf. 1) deci $m\widehat{AOB} + m\widehat{BOC} + m\widehat{COA} = (m\widehat{AOB} + m\widehat{BOA'}) + (m\widehat{A'OC} + m\widehat{COA}) = 180° + 180° = 360°$.

Teorema 3. ***Într-un triunghi cele 3 bisectoare sunt concurente.***



Dem. Notăm cu I intersecția bisectoarelor lui $\hat{A}$ și $\hat{B}$. Construim $IF \perp AB$, $F \in AB$, $IE \perp AC$, $E \in AC$, $IG \perp BC$, $G \in BC$. Din $I \in$ bisectoarei lui $\hat{A} \rightarrow IF = IE$ (1). Din $I \in$ bisectoarei lui $\hat{B} \rightarrow IF = IG$ (2). Din rel. 1,2 $\rightarrow IE = IG \rightarrow I \in$ bisectoarei lui $\hat{C} \rightarrow$ $\rightarrow$ cele 3 bisectoare sunt concurente în I.

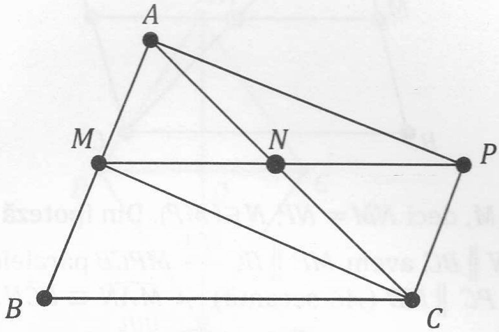
Teorema 4. ***Într-un triunghi dreptele suport ale înălțimilor sunt concurente.***



Dem. Fie ΔABC, $[AD]$, $[CF]$, $[BE]$ înălțimi. Construim $PN \parallel BC$, $A \in PN$, $PM \parallel AC$, $B \in PM$, $MN \parallel AB$, $C \in MN$. Din $PA \parallel BC$, $AC \parallel PB \rightarrow PACB$ paralelogram $\rightarrow PA = BC$ (1). Din $AN \parallel BC$, $AB \parallel NC \rightarrow ANCB$ paralelogram $\rightarrow BCAN$ paralelogram $\rightarrow$ $\rightarrow BC = AN$(2). Din rel. 1, 2 $\rightarrow A$ mijlocul $[PN]$. Cum $AD \perp BC$, $BC \parallel PN \rightarrow AD \perp PN$, deducem AD mediatoarea $[PN]$. Analog BE mediatoarea lui $[PM]$, CF mediatoarea lui $[MN]$, deci AD, BE, CF concurente. (Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.)

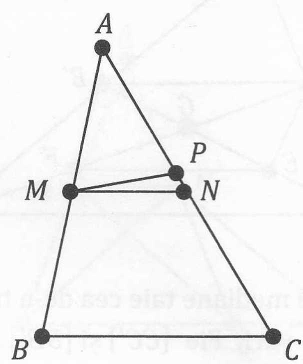
Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Teorema 5. (Teorema liniei mijlocii) ***Într-un triunghi, segmentul care unește mijloacele a două laturi este paralel cu cea de-a treia și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.***



Dem. Fie ΔABC: M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[AC]$. Construim $P = sim_N M$, deci $MN = NP$, M, N, P coliniare. Cum $AN = NC \rightarrow APCM$ paralelogram $\rightarrow PC = MA$, $PC \parallel MA$. Dar $MA = MB$, $M \in (AB)$, deci $MB = PC$ și $MB \parallel PC$, de unde $MBPC$ paralelogram. Rezultă $MP \parallel BC$ și $MP = BC$ și de aici $MN = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}BC, MN \parallel BC$.

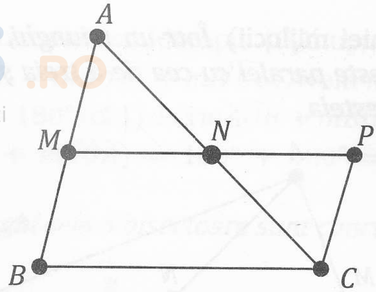
Teorema 6. (Reciproca 1 a teoremei liniei mijlocii) ***Dacă într-un triunghi*** ΔABC, M ***mijlocul*** $[AB]$, $MN \parallel BC$, $N \in AC$ ***atunci*** N ***mijlocul*** $[AC]$.



Dem. Presupunem că N nu e mijlocul $[AC]$. Fie P mijlocul lui $[AC]$. În ΔABC: M mijlocul lui $[AB]$, P mijlocul lui $[AC] \rightarrow [MP]$ linie mijlocie $\xrightarrow{T.l.m.} MP \parallel BC$, deci avem cf. axiomei lui Euclid $P = N$, de unde N mijlocul lui $[AC]$.

Teorema 7. (Reciproca 2 a teoremei liniei mijlocii) ***Dacă într-un*** ΔABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ ***și*** $MN = \frac{BC}{2}$, ***atunci*** M ***mijlocul lui*** $[AB]$, N ***mijlocul lui*** $[AC]$.

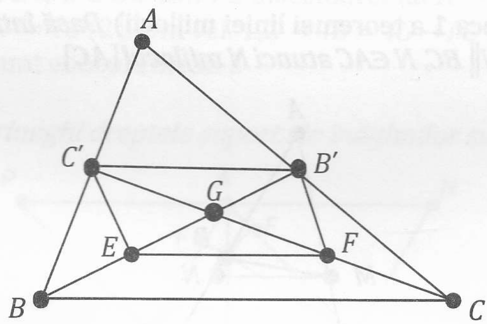
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți



Dem. Fie $P = sim_N M$, deci $NM = NP$, $N \in (MP)$. Din ipoteză $BC = 2MN$, deci $BC = MP$ (1). Cum $MN \parallel BC$, avem $MP \parallel BC \xrightarrow{cf.1} MPCB$ paralelogram $\rightarrow PC = MB$ (2), $PC \parallel MB$. Din $PC \parallel MB$ (AC secantă) $\rightarrow \widehat{MAN} \equiv \widehat{PCN}$. Fie $\Delta MAN, \Delta PCN$: $\widehat{ANM} \equiv \widehat{CNP}$ (op.vf.), $MN = NP$, $\widehat{MAN} \equiv \widehat{PCN} \xrightarrow{UUL} \Delta MAN \equiv \Delta PCN \rightarrow PC = MA$ (3), $AN = NC$ (4). Din rel. 2, 3 $\rightarrow MA = MB \rightarrow M$ mijlocul lui $[AB]$. Din rel.4 $\rightarrow$ $\rightarrow N$ mijlocul lui $[AC]$.

Obs. Problema se poate rezolva folosind T.F.A.

Teorema 8. *Medianele unui triunghi sunt concurente.*

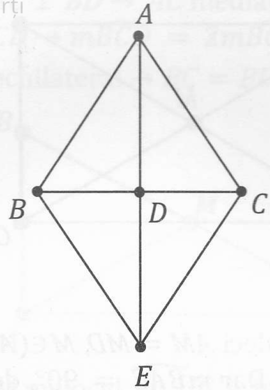


Dem. Arătăm că două dintre mediane taie cea de-a treia mediană într-un punct aflat la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf. Fie $[CC']$ și $[BB']$ două mediane ale ΔABC. Considerăm mijlocul E al lui $[BG]$ și mijlocul F al lui $[GC]$. În ΔGBC: $[EF]$ linie mijlocie $\xrightarrow{T.l.m.} EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2} BC$ (1).

În ΔABC : $[C'B']$ linie mijlocie $\xrightarrow{T.l.m.} C'B' \parallel BC$, $C'B' = \frac{1}{2} BC$ (2). Din rel. 1, 2 $\rightarrow$ $\rightarrow C'B' \parallel EF$, $C'B' = EF \rightarrow C'B'FE$ paralelogram $\rightarrow C'G = GF = FC = \frac{1}{3} C'C \rightarrow [BB']$ taie $[CC']$ la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf. Analog, $[AA']$ taie $[CC']$ la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf, deci medianele unui triunghi sunt concurente.

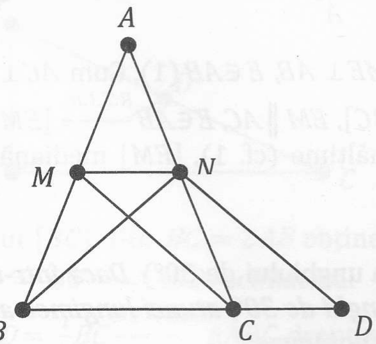
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Teorema 9. ***Dacă într-un triunghi o mediană este și bisectoare, atunci triunghiul este isoscel.***



Dem. Fie ΔABC: $[AD]$ mediană și bisectoare. Construim $E = sim_D A$, deci $AD = DE$, $D \in (AE)$. Cum $BD = DC$, avem $ABEC$ paralelogram, de unde $CE \parallel AB$ (1) și $CE = AB$ (2). Din $CE \parallel AB$ (AE secantă) $\rightarrow \widehat{BAE} \equiv \widehat{AEC}$ (alterne interne). Dar $\widehat{BAE} \equiv \widehat{EAC}$ (ip.), deci $\widehat{EAC} \equiv \widehat{AEC} \rightarrow \Delta AEC$ isoscel: $AC = CE \xrightarrow{cf.\ 2} AB = AC$.

Teorema 10. ***Dacă într-un triunghi două mediane sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.***

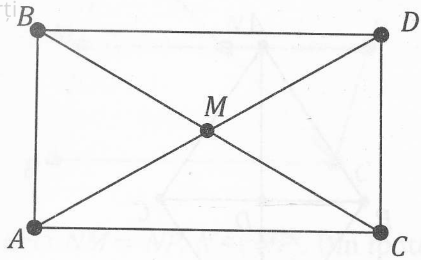


Dem. Fie ΔABC: $[MC], [BN]$ mediane, $MC = BN$. Construim $ND \parallel MC$, $D \in BC$ (1). În ΔABC: $[MN]$ linie mijlocie $\xrightarrow{T.l.m.} MN \parallel BC \rightarrow MN \parallel CD \xrightarrow{cf.1} MNCD$ paralelogram $\rightarrow ND \parallel MC$, $ND = MC$. Din $ND \parallel MC$ (BD secantă) $\rightarrow$ $\rightarrow \widehat{MCB} \equiv \widehat{NDB}$ (corespondente) (2).

Din $ND = MC$, $MC = BN$ (ip.) $\rightarrow NB = ND \rightarrow \Delta BND$ isoscel: $\widehat{NBD} \equiv \widehat{NDB} \xrightarrow{cf.\ 2}$ $\xrightarrow{cf.\ 2} \widehat{NBC} \equiv \widehat{MCB}$. Fie ΔMCB, ΔNBC: $BC = BC$, $\widehat{NBC} \equiv \widehat{MCB}$, $MC = NB \xrightarrow{LUL}$ $\xrightarrow{LUL} \Delta MCB \equiv \Delta NBC \rightarrow NC = MB \rightarrow 2NC = 2MB \rightarrow AC = AB \rightarrow \Delta ABC$ isoscel.

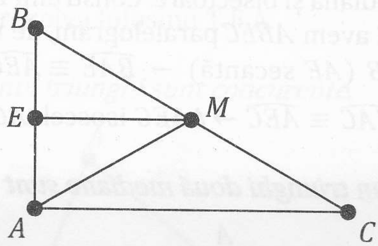
Libris.RO
Respect pentru oameni și cărți

Teorema 11. (Teorema medianei) *Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.*



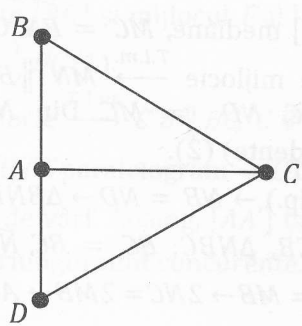
Dem.

Metoda 1. Construim $D = sim_M A$, deci $AM = MD, M \in (AD)$. Cum $BM = MC$ (ip.), deducem că $ABDC$ paralelogram. Dar $m\widehat{BAC} = 90°$, deci $ABDC$ dreptunghi $\rightarrow$ $\rightarrow AD = BC \rightarrow AM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$.



Metoda 2. Construim $ME \perp AB$, $E \in AB$ (1). Cum $AC \perp AB$, deducem $EM \parallel AC$. În ΔABC: M mijlocul lui $[BC]$, $EM \parallel AC$, $E \in AB \xrightarrow{R.T.l.m.} [EM]$ linie mijlocie $\rightarrow EB = EA$ (2). În ΔABM: $[EM]$ înălțime (cf. 1), $[EM]$ mediană (cf. 2) $\rightarrow \Delta ABM$ isoscel: $AM = BM = \frac{1}{2}BC$.

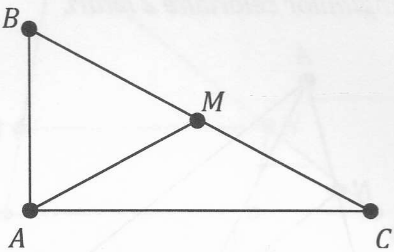
Teorema 12. (Teorema unghiului de 30°) *Dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă se opune unui unghi de 30°, atunci lungimea acestei catete este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.*



Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

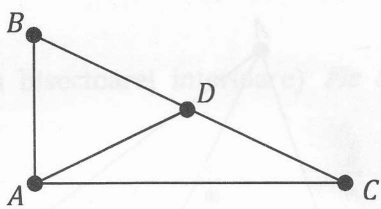
Dem.

Metoda 1. Fie ΔABC ($m\hat{A} = 90°$): $m\hat{C} = 30°$. Construim $D = sim_A B$, deci $BA = AD$, $A \in (BD)$. Cum $AC \perp BD \rightarrow AC$ mediatoarea lui $[BD] \rightarrow \Delta CBD$ isoscel $\rightarrow [AC]$ bisectoare în $\Delta BCD \rightarrow m\widehat{BCD} = 2m\widehat{BCA} = 60°$. Deci ΔBCD: $BC = CD$, $m\widehat{BCD} = 60° \rightarrow \Delta BCD$ echilateral $\rightarrow BC = BD \rightarrow AB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BC$.



Metoda 2. Considerăm M mijlocul lui $[BC]$. În ΔABC ($m\hat{A} = 90°$): $[AM]$ mediană $\xrightarrow{T.med.} AM = MC = MB$. În ΔAMC: $AM = MC \rightarrow m\widehat{MAC} = m\widehat{MCA} = 30° \rightarrow m\widehat{BMA} = m\widehat{MAC} + m\widehat{MCA} = 60°$ (unghi exterior). În ΔABM: $AM = MB$, $m\widehat{BMA} = 60° \rightarrow \Delta ABM$ echilateral $\rightarrow AB = BM = \frac{1}{2}BC$.

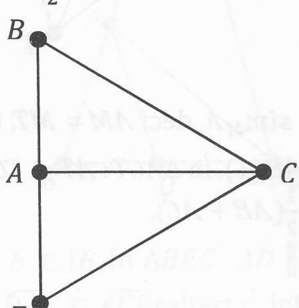
Teorema 13. ***Dacă într-un ΔABC, $m\widehat{ABC} = 60°$, $BC = 2AB$, atunci $m\widehat{BAC} = 90°$.***



Dem.

Metoda 1. Fie D mijlocul lui $[BC]$. Din $BC = 2AB$ obținem $AB = BD = DC$. În ΔABD: $AB = BD$, $m\widehat{ABD} = 60° \rightarrow \Delta ABD$ echilateral $\rightarrow AB = BD = \frac{1}{2}BC$.

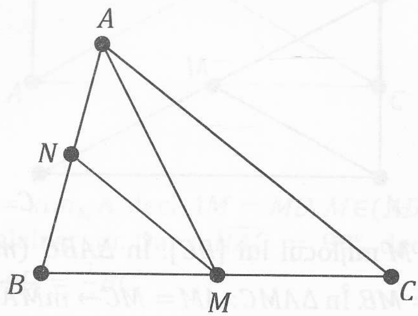
În ΔABC: $[AD]$ mediană, $AD = \frac{1}{2}BC \xrightarrow{R.T.med.} \Delta ABC$ dreptunghic ($m\widehat{BAC} = 90°$).



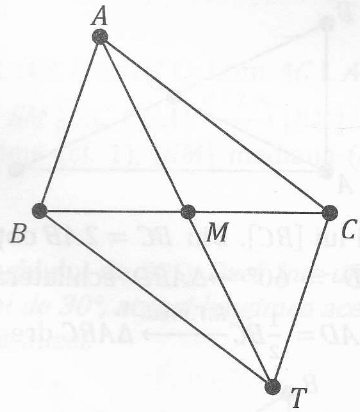
Libris.ro
Respect pentru oameni și cărți

Metoda 2. Fie $E = sim_A B$, deci $AE = AB$. Din $BC = 2AB$ obținem $BC = BE$. În ΔBEC: $BE = BC$, $m\widehat{EBC} = 60° \rightarrow \Delta BEC$ echilateral. În ΔBEC echilateral: $[CA]$ mediană $\rightarrow [CA]$ înălțime $\rightarrow m\widehat{BAC} = 90°$.

Teorema 14. ***Într-un triunghi, mediana corespunzătoare oricărei laturi este mai mică decât semisuma lungimilor celorlalte 2 laturi.***



Dem.
Metoda 1. Considerăm N mijlocul lui $[AB]$, M mijlocul lui $[BC]$. În ΔABC: $[MN]$ linie mijlocie $\xrightarrow{T.l.m.} MN = \frac{AC}{2}$. În ΔANM: $AM < AN + NM \rightarrow AM < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \rightarrow AM <$ $< \frac{1}{2}(AB + AC)$.



Metoda 2. Considerăm $T = sim_M A$, deci $AM = MT$. Cum $BM = MC$, deducem că $ABTC$ paralelogram $\rightarrow TC = AB$ (1). În ΔACT: $AT < TC + AC \xrightarrow{cf.\ 1} AT < AB + AC \rightarrow$ $\rightarrow 2AM < AB + AC \rightarrow AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.