Maria Zaharia

Caiet de vacanță
Matematică

Clasa a VII-a

Suport teoretic, exerciții și probleme aplicative

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

1. a) Dacă x este un număr natural, întreg sau rațional, atunci x^2 este .... lui x și despre numărul x^2 se spune că este ....

b) Rădăcina pătrată a unui număr pozitiv a este numărul pozitiv notat ...., al cărui pătrat ....

2. a) Dacă a și p sunt două numere pozitive, atunci $\sqrt{a} = p$ dacă și numai dacă ....

b) Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural este ....

3. a) Operația prin care se află rădăcina pătrată a unui număr pozitiv se numește .... din acel număr.

b) Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-un pătrat perfect se descompune .... și se folosește proprietatea $n = p^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} =$ ....

4. a) Prin estimare se înțelege ....

b) A estima rădăcina pătrată a unui număr înseamnă ....

5. a) Pentru a estima, pentru a aproxima prin adaos sau prin lipsă la un anumit ordin de mărime rădăcina pătrată dintr-un număr pozitiv care nu este pătrat perfect, se folosește ....

b) A calcula rădăcina pătrată a numărului 2, care nu este ...., cu o eroare mai mică decât 0,00001, înseamnă a scrie $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ cu ajutorul unui .... și a scrie rezultatul luând în considerație doar .... zecimale, adică $\sqrt{2} =$ ....

6. a) Dacă $n \in \{0, 1, 2, 7, 11, 12\}$, atunci $n^2 \in \{$............................$\}$.

b) Dacă $n^2 \in \{9, 16, 25, 36, 64, 81, 100\}$, atunci $\sqrt{n^2} \in \{$............................$\} =$ $=$ ....

7. Se consideră mulțimea $M = \{8, 121, 72, 144, 49, 169\}$.

a) Elementele mulțimii M care sunt pătrate perfecte sunt ....

b) Rădăcinile pătrate ale numerelor naturale pătrate perfecte din mulțimea M sunt ....

8. a) Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect poate fi: ....

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este 2, 3, 7 sau 8, atunci numărul respectiv ....
....

9. a) Dacă ultima cifră a unui număr este 4, atunci numărul respectiv poate ....
.... sau ....

b) Numerele 14, 24, 34, 44, 54 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi nu sunt ....

c) Numerele 4, 64, 144, 324 ş.a.m.d. au ultima cifră 4 şi sunt ....;
$4 = 2^2$; $64 = 8^2$; $144 = 12^2$; $324 = 18^2$.

10. a) Dacă $\sqrt{\overline{1xy}}$ este număr natural, atunci $\overline{1xy} \in$ ....
....

b) Dacă $\sqrt{\overline{3ab}}$ este număr natural, atunci $a + b \in$ ....
....

11. Rădăcinile pătrate ale numerelor:

a) $2^2 \cdot 3^4$; $2^6 \cdot 5^2$; $5^4 \cdot 7^2$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ sunt ....;

b) 576; 1024; 1764; 15876 sunt ....

12. a) Pătratele perfecte mai mici decât 51 sunt ....

b) Pătratele perfecte cuprinse între 200 şi 391 sunt ....

13. a) Mulţimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^2 \leq x < 6^2\}$ are .... elemente.

b) Numărul pătratelor perfecte cuprinse între 2^2 şi 7^2 este egal cu ....

14. Efectuând următoarele calcule se obţine:

a) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ ....;

b) $\sqrt{12^2 + 16^2} =$ ....;

c) $\sqrt{2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^2} =$ ....;

d) $\sqrt{9 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5^2} =$ ....

15. a) Pătratele perfecte de trei cifre sunt: ....
....

b) Numerele de forma $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 7$ şi $5n + 8$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece
....
....

16. Folosind un calculator, scrieţi cu două zecimale exacte numerele:

a) $\sqrt{19} =$ ....; b) $\sqrt{111} =$ ....; c) $\sqrt{631} =$ ....

17. a) Două numere întregi consecutive între care se poate încadra numărul $\sqrt{31}$ sunt .... și ....

b) Aproximarea prin lipsă la sutimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

c) Aproximarea prin adaos la miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

d) Rotunjirea la zecimi de miimi a numărului $\sqrt{31}$ este ....

18. Numerele naturale x pentru care:

a) $4 < \sqrt{x} < 5$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{3} < x < \sqrt{19}$ sunt: ....

19. Trei numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ sunt: .... ;

b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{18}$ sunt: ....

20. Se consideră mulțimile: $A = \left\{0; \frac{1}{2^0}; \frac{1}{2^1}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \frac{64}{16}\right\}$ și $B = \left\{\sqrt{x}, x \in A \text{ și } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$. Cardinalul mulțimii B este ...., deoarece $B = \{$....................$\}$.

21. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{19}; \frac{1}{20}\right\}$. Mulțimea $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$ are .... elemente.

22. Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{0{,}16}; \sqrt{\frac{9}{49}}; \sqrt{\frac{121}{25}}; \sqrt{\frac{4}{169}}\right\}$. Numărul fracțiilor subunitare din această mulțime este egal cu ....

23. Calculând rădăcinile pătrate ale numerelor: $\frac{25}{49}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; 0,25; $\frac{1}{2500}$; $\frac{196}{324}$ se obțin rezultatele:

....

24. Precizați rădăcina pătrată a numărului n cu aproximație de o unitate (prin lipsă și prin adaos) dacă:

a) $n = 37$; b) $n = 71$.

Soluție: a) Deoarece $36 < 37 < 49$, adică $6^2 < 37 < 7^2$, rezultă că $6 < \sqrt{37} < 7$ și $\sqrt{37} \approx 6$ (prin lipsă), respectiv $\sqrt{37} \approx 7$ (prin adaos).

....

....

25. Demonstrați că numărul $n = 2019 + 2(1 + 2 + 3 + ... + 2018)$ este pătrat perfect.

I.2 Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

1. a) Un număr natural $b \geq 2$ este liber de pătrate dacă ....

b) Numerele: 10, 33, 11, 35, 210 sunt ....

c) Numerele: 18, 20, 75, 98, 847 nu sunt ....

2. a) Dacă a şi b sunt două numere reale pozitive, atunci $\sqrt{a^2 b}$ = ..., unde b este liber de pătrate şi se spune că am folosit ....

b) Pentru $b = 1$ se obţine $\sqrt{a^2}$ = ...

3. Scrieţi numărul $\sqrt{112}$ sub forma $a\sqrt{b}$, cu b liber de pătrate: ....

4. a) Dacă a şi b sunt numere reale pozitive, atunci $a\sqrt{b} = \sqrt{\ldots\ldots}$ se numeşte formula de ....

b) Scrieţi numărul $3\sqrt{12}$ sub forma $\sqrt{a}$: ....

5. a) Descompunerea în factori primi a numerelor 28, 180, 147 este: ....; ....; ....

b) Scriind numerele de la punctul a) sub forma $a\sqrt{b}$, cu b liber de pătrate, se obţin rezultatele: ....; ....; ....

6. Introducând factorii sub radical se obţine:

a) $2\sqrt{5}$ = ... = ... = ...; b) $7\sqrt{2}$ = ... = ... = ...;

c) $3\sqrt{7}$ = ... = ... = ...; d) $4\sqrt{6}$ = ... = ... = ...

7. a) Cel mai mic număr întreg mai mare decât $2^2 \cdot 5\sqrt{3}$ este ....

b) Cel mai mare număr întreg mai mic decât $2^2 \cdot 5\sqrt{3}$ este ....

8. Se consideră numărul $3\sqrt{10}$.

a) Introducând factorii sub radical şi scriind două numere întregi consecutive între care se poate încadra numărul se obţine: ....

b) Aproximarea prin lipsă și prin adaos de o unitate a numărului este ...., respectiv ....

9. a) Cifra sutimilor numărului $6\sqrt{5}$ este ....

b) Cifra miimilor numărului $11\sqrt{2}$ este ....

10. Dacă n este un număr natural, scoțând factorii de sub radical se obține:

a) $\sqrt{25^n + 25^{n+1} + 25^{n+2}} =$ .... ;

b) $\sqrt{50^n \cdot 18^{n+1} \cdot 9^n} =$ ....

I.3 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real

1. a) Numărul irațional este o fracție ....

b) Trei exemple de numere iraționale sunt: ....

c) Mulțimea numerelor iraționale se notează cu ....

2. a) Mulțimea numerelor naturale este $\mathbb{N} =$ ....

b) Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z} =$ ....

c) Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q} =$ ....

d) Mulțimea numerelor reale este: ....

3. Având în vedere că orice număr natural este număr întreg, că orice număr întreg este număr rațional și că orice număr rațional este număr real, între mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ există incluziunile:
....

4. Un număr real x poate fi:

a) negativ și notăm ....;

b) nul și notăm ....;

c) pozitiv și notăm ....

5. a) Modulul numărului real pozitiv a este .... și se notează $|a| =$ ...., iar modulul numărului negativ a este .... și se notează $|a| =$ ....

b) Completați:

$|-3| = \ldots\ldots = \ldots\ldots$; $\qquad \left|-\sqrt{3}\right| = \ldots\ldots = \ldots\ldots$;

$|0{,}1(3)| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\qquad \left|2\sqrt{2}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\sqrt{7} = |\ldots\ldots|$ sau $\sqrt{7} = |\ldots\ldots|$; $\qquad 0{,}1 = |\ldots\ldots|$ sau $0{,}1 = |\ldots\ldots|$.

6. Modulul numerelor reale are toate proprietățile învățate la numerele raționale. Dacă a și b sunt numere reale, atunci:

a) $|a|$ ...... 0 și $|a| = 0$ dacă și numai dacă ....;

b) $|a|$ ...... $|-a|$ și $|a|^2$ ...... a^2;

c) $|a \cdot b|$ ...... $|a| \cdot |b|$ și, pentru $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right|$ ...... $\frac{|a|}{|b|}$.

7. Proprietăți speciale ale modulului numerelor reale sunt:

a) $\sqrt{a^2}$ ...... $|a|$, oricare ar fi numărul real a;

b) formula de scoatere a unui factor de sub radical este: $\sqrt{a^2 b}$ ...... $|a|\sqrt{b}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$;

c) formula de introducere a unui factor sub radical este: $|a|\sqrt{b}$ ...... $\sqrt{a^2 b}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

8. Compararea și ordonarea numerelor reale respectă .... învățate la compararea și ordonarea numerelor raționale:

a) orice număr negativ .... decât orice număr pozitiv;

b) dintre două numere negative, mai mic este acela care ....

9. Relația de egalitate pe mulțimea numerelor reale, „=", are următoarele proprietăți:

a) **reflexivitate**, adică ....;

b) **simetrie**, adică ....;

c) **tranzitivitate**, adică ....

10. Relația de ordine „≤" are următoarele proprietăți:

a) **reflexivitate**, adică ....;

b) **antisimetrie**, adică ....;

c) **tranzitivitate**, adică ....

11. a) Se numește axă a numerelor o dreaptă ....
....

b) Oricărui număr real îi corespunde pe axa numerelor ....

c) Oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde ....

d) Dacă A și B sunt două puncte distincte de pe axa numerelor, egal depărtate de origine, adică OA = ..., coordonatele acestor puncte sunt numere reale .... Astfel, dacă coordonata lui A este x, coordonata lui B este .... Concluzionăm, astfel, că $|x|$ = ...

12. Scrieți:

a) trei numere naturale: ....;

b) trei numere raționale care să nu fie întregi: ....;

c) trei numere întregi care să nu fie naturale: ....;

d) trei numere iraționale: ....;

e) trei numere reale care să nu fie iraționale: ....

13. Suma, respectiv diferența dintre un număr rațional și un număr irațional este ...., iar produsul dintre un număr rațional și unul irațional este un număr ....

14. Scoateți factori de sub radical, punând condițiile necesare:

a) $\sqrt{20x^4}$ = ...; b) $\sqrt{11x^3}$ = ...;

c) $\sqrt{\dfrac{2x^3}{3y^2}}$ = ...; d) $\sqrt{18xy^3}$ = ...

15. Fie a și b numere raționale nenegative. Știind că $\sqrt{a^2} = a$ și $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, introduceți factorii sub radical și calculați:

a) $14\sqrt{5} = \sqrt{14^2 \cdot 5} = \sqrt{980}$; b) $-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \cdot 3} = -\sqrt{48}$;

c) $7\sqrt{11}$ = ...; d) $-11\sqrt{19}$ = ...;

e) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{35}$ = ...; f) $0,3\sqrt{120}$ = ...

16. Introduceți factorii sub radical, știind că a este un număr real oarecare:

a) $a\sqrt{23}$ = ..., dacă .... și $a\sqrt{23}$ = ..., dacă ....;

b) $-a^2\sqrt{7}$ = ...;

c) $a\sqrt{5a}$ = ...

17. Comparați numerele reale, introducând factorii sub radical:

a) $7\sqrt{23}$ și $3\sqrt{29}$: ....;

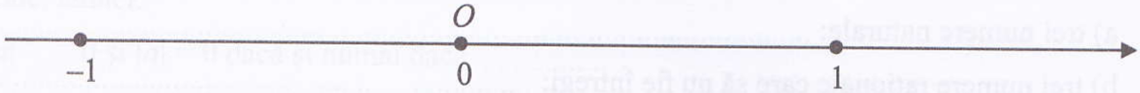
b) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{192}$ și $-2\sqrt{60}$: ....

18. Scoateți factori de sub radical, punând condițiile necesare:

a) $\sqrt{54a^4} =$ ....; b) $\sqrt{13a^3} =$ ....;

c) $\sqrt{32ab^3} =$ ....; d) $\sqrt{\dfrac{2a^2}{9b^3}} =$ ....

19. Se consideră axa numerelor:



a) Reprezentați pe axă numerele: $\sqrt{2}$, $-\dfrac{1}{5}$, $\sqrt{3}$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}$, $-\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$ și notați cu A, B, C, D, E, F, G, H punctele care le au drept coordonate.

b) Completați spațiile punctate:

• $OA =$ ....; • $OB =$ ....; • $OC =$ ....; • $OD =$ ....

20. Pe o axă a numerelor avem reprezentate punctele A și B, astfel încât $OA = 5$ (u.m.) și $OB = 2$ (u.m.). Se notează cu x_A și x_B coordonatele punctelor A și B. Scrieți coordonatele punctelor A și B și calculați AB.

$x_A =$ ...., $x_B =$ .... $\Rightarrow AB =$ ....

$x_A =$ ...., $x_B =$ .... $\Rightarrow AB =$ ....

$x_A =$ ...., $x_B =$ .... $\Rightarrow AB =$ ....

$x_A =$ ...., $x_B =$ .... $\Rightarrow AB =$ ....

21. Dacă A și B sunt două puncte reprezentate pe axa numerelor reale și coordonatele acestora sunt $\sqrt{5}$ și $-\sqrt{5}$, atunci:

a) distanța de la originea axei la A este .... cu distanța de la originea axei la B;

b) lungimea segmentului AB rotunjită la sutimi este de ....

22. Fie mulțimea $M = \left\{2; -3; \dfrac{1}{2}; 0,2; -5; \sqrt{9}; -\sqrt{20}; -0,1(3); \sqrt{3}; -\sqrt{2}\right\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\} =$ ....;

$B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\} =$ ....;

$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} =$ ....

23. Se consideră mulțimea $M = \left\{13; 1,1; 2\sqrt{3}; \dfrac{1}{2}; 5\right\}$. Scrieți elementele mulțimii:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \in M\}.$$

....

24. Verificați dacă numerele următoare sunt pozitive sau negative:

a) $x = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$;

b) $x = -5\sqrt{2} + 7$;

c) $x = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$.

25. Comparați numerele:

a) $x = 11 + 5\sqrt{6}$ și $y = 11 + 6\sqrt{5}$;

b) $x = \left|3\sqrt{2} - 5\right|$ și $y = \left|6 - 4\sqrt{2}\right|$.

26. Ordonați crescător numerele: $-5\sqrt{10}$, $-10\sqrt{3}$ și $-7\sqrt{5}$.

27. Comparați numerele x și y, dacă:

a) $x = 5\sqrt{10}$ și $y = 3\sqrt{20}$;

b) $x = -5\sqrt{10}$ și $y = -3\sqrt{20}$;

c) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$ și $y = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$;

d) $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ și $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

28. Comparați numerele reale, introducând factorii sub radical:

a) $3\sqrt{29}$ și $5\sqrt{24}$: ...;

b) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{125}$ și $-\dfrac{3}{4}\sqrt{50}$: ... .

I.4 Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{Q}^*$, b pozitiv

1. a) **Suma** a două numere reale a și b este .... notat ....
Numerele a și b sunt ....

b) Operația prin care se obține suma a două numere reale se numește ....

2. Adunarea numerelor reale are următoarele proprietăți:

a) **asociativitatea**, adică ....
....;

b) **comutativitatea**, adică ....
....;

c) **existența elementului neutru**, adică ....
....;

d) **orice număr real are un opus**, adică ....
....

3. a) **Diferența** dintre numărul real a și numărul real b este un număr real, notat .... și definit astfel: $a - b =$ .... Numerele a și b sunt ...., a este **descăzutul**, iar b este **scăzătorul**.

b) Operația prin care se obține diferența dintre două numere reale se numește ....
....

4. Oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $y \geq 0$, au loc egalitățile: $x\sqrt{y} + z\sqrt{y} = (x+z)\cdot\sqrt{y}$ și $x\sqrt{y} - z\sqrt{y} = (x-z)\cdot\sqrt{y}$. Calculați:

a) $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} =$ ....;

b) $5\sqrt{7} - 9\sqrt{7} + 4\sqrt{7} =$ ....;

c) $1,5\sqrt{11} - 14\sqrt{7} + 0,5\sqrt{11} - 6\sqrt{7} =$ ....;

d) $\frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{2}{3} - 0,(6) + \frac{1}{12}\sqrt{5} =$ ....

5. Scoateți factori de sub radical și apoi calculați:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} =$ ....;

b) $\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{108} =$ ....;

c) $-2\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{125} + 4\sqrt{5} =$ ....