Polinoame

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$, $g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}_3$.

a) Calculați $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului f.

c) Demonstrați că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru oricare $a \in \mathbb{Z}_3$.

Polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

c) Arătați că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.

b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Verificați dacă $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$.

Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$.

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$.

a) Calculați $a + b$, știind că $f(1) = 0$.

b) Pentru $a = -1$ și $b = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{2},\ \hat{3},\ \hat{4},\ \hat{5}\}$.

a) Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, pentru $x\in\mathbb{Z}_6$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}_6$.

Fie polinomul $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3+\hat{2}X^2$ și mulțimea $G=\{g=aX^3+bX^2+cX+d \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3\}$.

a) Calculați $f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=mX^5+nX$, cu $m,n\in\mathbb{Z}_5$.

a) Determinați $n\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1})=m$.

b) Pentru $m=\hat{1}$ și $n=\hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

c) Arătați că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.