06 martie 2021 Prof. dr. Dorin Andrica

Trigonometrie

1. Să se simplifice expresia

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}.$$

2. Arătaţi că

$$\text{tg }x+2\text{tg }2x+4\text{tg }4x+8\text{ctg }8x=\text{ctg }x.$$

3. Calculaţi

$$\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}.$$

4. Demonstraţi că pentru orice $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ are loc relaţia

$$\sqrt{2+2\cos x}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}=\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

5. Fie $a_n=\cos^{2n}x+\sin^{2n}x, n=0,1,\ldots$ Demonstraţi că

$$(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})\sin^2 x\cos^2 x=a_1-a_{n+1}, n=1,2,\ldots$$

6. Să se arate că $\sin 1^\circ+\cos 1^\circ\notin\mathbb{Q}$.

Trigonometrie - soluţii

1. Să se simplifice expresia

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{1+\cos \frac{x}{2}}.$$

Soluţie. Folosind formulele:

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x \quad \text{şi}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$

avem

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{4}} = \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} = \mathrm{tg}\frac{x}{4}.$$

2. Arătaţi că

$$\mathrm{tg}\ x + 2\mathrm{tg}\ 2x + 4\mathrm{tg}\ 4x + 8\mathrm{ctg}\ 8x = \mathrm{ctg}\ x.$$

Soluţie. Folosind identitatea

$$\mathrm{tg}\ x = \mathrm{ctg}\ x - 2\mathrm{ctg}\ 2x,$$

membrul stâng devine:

$$\mathrm{ctg}\ x - 2\mathrm{ctg}\ 2x + 2(\mathrm{ctg}\ 2x - 2\mathrm{ctg}\ 4x) + 4(\mathrm{ctg}\ 4x - 2\mathrm{ctg}\ 8x) + 8\mathrm{ctg}\ 8x = \mathrm{ctg}\ x.$$

3. Calculaţi

$$\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}.$$

Soluţie. Expresia din enunţ se scrie succesiv

$$P = \frac{2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{4\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{4\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{2\cos\frac{3\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\sin\frac{6\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}.$$

4. Demonstraţi că pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ are loc relaţia

$$\sqrt{2+2\cos\ x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\ x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\ x}}} = \frac{\sin\ x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

Soluţie. Fiecare factor din membrul stâng se poate scrie:

$$\sqrt{2+2\cos x} = \sqrt{2(1+\cos x)} = \sqrt{2^2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2^2} = 2\cos\frac{x}{4},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos x}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{4}} = 2\cos\frac{x}{2^3} = 2\cos\frac{x}{8};$$

astfel avem:

$$8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8} = \frac{4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\left(2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\right)}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\right)}{\sin\frac{x}{8}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

5. Fie $a_n = \cos^{2n} x + \sin^{2n} x, n = 0, 1, \ldots$ Demonstraţi că

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) \sin^2 x \cos^2 x = a_1 - a_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$$

Soluţie.

$$a_k = (\cos^{2k} x + \sin^{2k} x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= \cos^{2(k+1)} x + \sin^{2(k+1)} x + \cos^{2k} x \sin^2 x + \sin^{2k} x \cos^2 x$$
$$= a_{k+1} + (\sin^2 x \cos^2 x) a_{k-1}.$$

Din relaţia de recurenţă

$$a_k = a_{k+1} + a_{k-1} \sin^2 x \cos^2 x,$$

obţinem

$$a_1 = a_{n+1} + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) \sin^2 x \cos^2 x.$$

6. Să se arate că $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Soluţie. Fie $x = \sin 1^\circ + \cos 1^\circ$ şi presupunem prin reducere la absurd că $x \in \mathbb{Q}$. Prin calcule, avem:

$$\begin{aligned}
&x^2 = 1 + \sin 2^\circ, \text{ deci } \sin 2^\circ \in \mathbb{Q},\\
&\cos 4^\circ = 1 - 2\sin^2 2^\circ, \text{ deci } \cos 4^\circ \in \mathbb{Q},\\
&\cos 12^\circ = \cos 3 \cdot 4^\circ = 4\cos^3 4^\circ - 3\cos 4^\circ \in \mathbb{Q},\\
&\cos 36^\circ = 4\cos^3 12^\circ - 3\cos 12^\circ \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Dar $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \notin \mathbb{Q}$, care contrazice presupunerea făcută, deci $x \notin \mathbb{Q}$.

Valoarea lui $\cos 36^\circ$ se poate calcula din egalitatea $\sin 72^\circ = \sin 108^\circ$, exprimând arcul dublu, respectiv triplu al lui 36°. Mai precis, notam $a = 36^\circ$ si avem $\sin 2a = \sin 3a$, deci

$$2\sin a \cos a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

de unde obtinem

$$2\cos a = 3 - 4\sin^2 a,$$

adica

$$2\cos a = 3 - 4(1 - \cos^2 a).$$

Prin rezolvarea ecuatiei $4\cos^2 a - 2\cos a - 1 = 0$ rezulta $\cos a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Deoarece $\cos a > 0$ obtinem $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.