12 decembrie 2020 Conf. dr. Adriana Buică

Ecuaţii şi inecuaţii

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\log_2|x| + \log_{|x|} 4 = 3. \quad \diamond$$

2. (Model propus la UBB, 2019) Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei
$\log_2|x| + \log_{|x|} 4 = 3$ este: A. 2; B. 4; C. 0; D. 1. $\diamond$

3. (Concurs UBB, 2019) Fie $a \in \mathbb{R}$ un parametru. Ecuaţia $x^2 + 2(a-1)x + a - 1 = 0$ nu are nicio soluţie reală dacă:
A. $a \in (1, \frac{3}{2})$; B. $a \in (-\infty, 1]$; C. $a \in (0, 1)$; D. $a \in (\frac{3}{2}, 2)$; E*. $a \in (0, \frac{3}{2})$. $\diamond$

4. (Model propus la UBB, 2019) O soluţie a inecuaţiei

$$A^3_{x+2} + C^2_{x+3} > 5(x+2), \qquad \text{este}$$

A. $x = 3$; B. $x = 2$; C. $x = 1$; D. $x = 0$. $\diamond$

Rezultate utile
Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale nevide şi $f : I \to J$ o funcţie. Fie $\alpha, \beta \in J$ cu $\alpha \leq \beta$.
Dacă f e injectivă atunci ecuaţia $f(x) = \alpha$ are cel mult o soluţie.
Dacă f e bijectivă atunci ecuaţia $f(x) = \alpha$ are soluţie unică, $x = f^{-1}(\alpha)$.
Dacă f e strict monotonă atunci f e injectivă.
Dacă f e bijectivă şi strict crescătoare, atunci f^{-1} e strict crescătoare.
Dacă f e strict crescătoare şi $x^* \in I$, atunci

$$\{x \in I \ : \ f(x) < f(x^*)\} = \{x \in I \ : \ x < x^*\}.$$

Dacă f e strict descrescătoare şi $x^* \in I$, atunci

$$\{x \in I \ : \ f(x) < f(x^*)\} = \{x \in I \ : \ x > x^*\}.$$

Un exemplu. Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$.
Ştim că f este bijectivă, iar inversa ei este $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \log_a y$.
Ştim că f şi f^{-1} sunt strict crescătoare dacă şi numai dacă $a > 1$.
De asemenea, f şi f^{-1} sunt strict descrescătoare dacă şi numai dacă $a < 1$. $\square$

5. (a) Să se justifice că suma a două funcţii strict descrescătoare este strict descrescătoare.
(b) Să se justifice că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare.
(c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3^x + 4^x = 5^x$ şi inecuaţia $3^x + 4^x > 5^x$.
(d) Să se justifice că f este bijectivă. $\diamond$

6. (a) Fie $f(x) = \sqrt{2-x} - x$. Să se determine domeniul maxim de definiţie D şi imaginea J ale funcţiei f de expresie $f(x)$. Să se justifice că $f : D \to J$ este bijectivă. Să se calculeze $f(0)$, $f^{-1}(0)$ şi să se arate că $0 < f^{-1}(1) < \frac{1}{2}$.
(b) Să se afle soluţiile reale ale ecuaţiilor $\sqrt{2-x} - x = 0$, $\sqrt{2-x} - x = 1$, respectiv, $\sqrt{2-x} - x = -3$, şi ale inecuaţiilor $\sqrt{2-x} - x < 0$, $\sqrt{2-x} - x < -3$, $\sqrt{2-x} - x > -3$, respectiv $\ln(\sqrt{2-x} - x) \leq 0$.
(c) Este $\frac{\pi}{4}$ soluţie a inecuaţiei $\ln(\sqrt{2-x} - x) \leq 0$? $\diamond$

Probleme propuse

7. Numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $\sqrt{3-x} - x = 0$ este
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3. $\diamond$

8. Numărul de soluţii reale ale ecuaţiei $\sqrt{3-x} - x = -10$ este
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3. $\diamond$

9. Ecuaţia $\sqrt{3-x} - x = a$ are cel puţin o soluţie reală dacă
A. $a \in (-\infty, -10)$; B. $a \in \{-10, -9, -8\}$; C. $a \in \{-3, -2, -1, 0\}$; D. $a \in \{8, 9, 10\}$. $\diamond$

10. O soluţie a inecuaţiei $\ln(-\sqrt{3-x} + x) \leq 0$ este
A. $x = 3$; B. $x = 2$; C. $x = e$; D. $x = 3/2$. $\diamond$