BAC.2009-NOŢIUNI TEORETICE- DERIVATE-INTEGRALE

profesor: Ciocotişan Radu-Carei

Funcţia $f(x)=\begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases}$ este continuă în x_0, dacă: $\boxed{l_s(x_0)=l_d(x_0)}$ unde $l_s(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$

$l_d(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$

Orice funcţie continuă admite primitive

$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2}$

$\left(\frac{1}{f_2}\right)' = \frac{-f_2'}{f_2^2}$

$(g(u))' = g'(u)\cdot u'$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ apoi derivare; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$

$(e^u)' = e^u u'; (a^u)' = a^u(\ln a)u'$

$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'; (\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}u'$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sin u)' = (\cos u)u'$

$(\cos u)' = (-\sin u)u'$

$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}u'$

$(ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u}u'$

$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Punctele de extrem (minim sau maxim)

- Se calculează prima derivată, $f'(x)$
- Se caută punctele critice, prin rezolvarea ecuaţiei $f'(x)=0$
- Se întocmeşte tabelul de variaţie a lui $f(x)$

Ecuaţia tangentei în punctul P(x0,y0)

la graficul lui f este:

x	domeniul definiţie şi punctele critice
f'	semnul derivatei (+++ sau ----)
f	dacă f'(x)>0 atunci f(x) este crescătoare dacă f'(x)<0 atunci f(x) este descrescătoare

Asimptotele unei funcţii

La toate acestea rezultate se adaugă o constantă C

- **Asimptotele orizontale** au ecuaţia: y =

Dacă există asimptote orizontale, nu pot exista

- **Asimptotele oblice** au ecuaţia: y = mx

- **Asimptotele verticale** au ecuaţia: x =

Convexitatea şi Concavitatea unei funcţii

Se calculează derivata a doua, f ''(x)

dacă $f''(x) > 0$ atunci f(x) este convexă

dacă $f''(x) < 0$ atunci f(x) este concavă

Primitive uzuale

F(x) este **o primitivă** a funcţiei *f(x)* dacă

1. *F(x)* este derivabilă şi
2. $\boxed{F'(x)=f(x)}$

Formula lui Leibniz-Newton

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) = \ldots$$

unde F(x) este o primitivă a lui f(x),
(care se calculează după regulile anterioare.)

Integrarea prin părţi

În exerciţii se cere $\int f(x)dx$

Dacă $f(x) = g'(x)h(x) \Rightarrow \int g'h = gh - \int gh'$

unde g' şi h se citesc din enunţ,
Iar g şi h'se calculează separat

Uneori se cere $\int_a^b g'h = gh\Big|_a^b - \int_a^b gh'$

Schimbarea de variabilă

(numai pentru funcţii compuse)

Dacă integrala se poate scrie $\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)dx$

Notăm $t=u(x)$

$dt = u'(x)dx$

Apoi, schimbăm limitele de integrare

x	a	b
t	u(a)	u(b)

Transformăm integrala numai în t şi o calculăm

$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ obţinându-se astfel rezultatul cerut.

Aria unei suprafeţe

delimitată de graficul lui f(x), axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b

$$Aria = \int_a^b f(x)dx$$

Dacă în urma calculelor efectuate se obţine un număr negativ, se reiau calculele, dar calculăm

$$Aria = -\int_a^b f(x)dx$$

Volumul unui corp de rotaţie

delimitat de graficul lui f(x), axa Ox şi dreptele de ecuaţii x=a şi x=b

$$Vol = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

$\int dx = x$

$\int x dx = \frac{x^2}{2}$; $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$; $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in Q$

$\int e^x dx = e^x$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$; $\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln|x \pm a|$

$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

$\int \sin x dx = -\cos x$

$\int \cos x dx = \sin x$

$\int tgx dx = -\ln|\cos x|$

$\int ctgx dx = \ln|\sin x|$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx$