Derivate, limite

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

c) Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Arătați că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

c) Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.

a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției f în

abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Calculaţi $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat p
funcției f.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

b) Calculați $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

a) Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1,$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficu

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.

b) Calculați $\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{16-x^2}$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

a) Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c) Demonstrați că $f(x)\ge-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției *f*.

c) Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(2,5)$.

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$.

a) Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției *f* în punctul $A(1,2)$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)+\frac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$.

a) Demonstrați că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$.

b) Demonstrați că funcția *f* este crescătoare pe $[0,1]$.

c) Demonstrați că $\dfrac{2}{e}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x^2+x+3^x$.

a) Calculați $f'(0)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\le 3^b-3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a\le b$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

a) Calculați $f'(x),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.