Integrale

Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f .

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

c) Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$.

a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)dx=2\int_0^{10} f(x)dx$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției f .

b) Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

a) Calculați $\int_0^1 f'(x)dx$.

b) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x+1$ este o primitivă a funcției f.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$.

a) Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

b) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=3m^2x^2+6mx+9$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției f_0.

b) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Calculați $\int_1^2\frac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x dx$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

a) Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției *f*.

b) Calculați $\int_1^e x\cdot f\left(x^2\right)dx$.

c) Determinați numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.

Se consideră funcțiile $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ și $g(x)=e^{1-x}$.

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției *f*.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx\geq 0$.

Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$.

a) Demonstrați că funcția *g* este o primitivă a funcției *f*.

b) Calculați $\int_1^4 f(x)dx$.

c) Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)}\cdot f(x)dx$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției *f*, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

a) Calculați $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}dx$.

b) Demonstrați că primitivele funcției f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c) Calculați $\int_1^e\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}dx$.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, \text{pentru } x\geq 1\\ 2x, \text{pentru } x<1\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

c) Calculați $\int_1^{\sqrt{6}} x\cdot f(x)dx$.

Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^x$.

a) Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2)dx\geq\frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

a) Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

b) Calculați $\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)dx$.

c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.