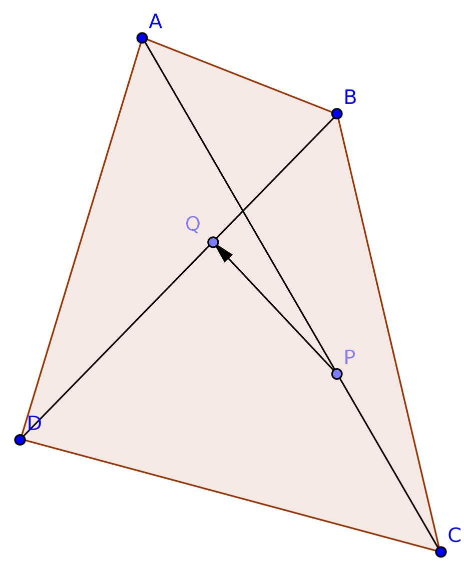
28 noiembrie 2020 Conf. dr. Cornel PINTEA

# Geometrie analitică

1. Fie $P$ şi $Q$ punctele care împart diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$ în rapoartele $\lambda$ respectiv $\mu$, adică $\overrightarrow{AP}= \lambda \cdot \overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{BQ}= \mu \cdot \overrightarrow{QD}$. Să se arate că

$$\overrightarrow{PQ}= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\mu}{1+\mu}\,\overrightarrow{DB}\,. \tag{0.1}$$




**Consecinţe:**

(a) Fie $P$ şi $Q$ mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Atunci

$$\overrightarrow{PQ}= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\right).$$

(Problema 2(a)(1) Partea B-Concursul de admitere din 12 septembrie 2018 de la Facultatea de Matematică-Informatică (UBB). Proba scrisă la MATEMATICĂ)

(b) Dacă $r$ şi $s$ sunt rapoartele în care punctul de intersecţie al diagonalelor patrulaterului $ABCD$ împarte diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$, atunci

$$\frac{1}{1+r}\,\overrightarrow{AC} + \frac{1}{1+s}\,\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{0}\,.$$

2. Determinaţi numerele reale $a$ şi $b$ astfel încât dreapta $(d)$ $ax + 2y + b - 6 = 0$ să treacă prin punctul $P(2, -3)$ şi să fie paralelă cu dreapta $(\Delta)$ $(b-2)x - 3y + a = 0$.

3. Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care următoarele drepte sunt perpendiculare

$$(d_m)\ (2m-1)x + (m-2)y = k+1 \text{ şi } (\Delta_m)\ (2m+1)x + (m+2)y = k-1,$$

unde $k \in \mathbb{R}$ este un scalar fixat.

4. Se consideră punctele $A\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ şi mulţimea

$$\mathcal{P} := \{M(x,y)\ :\ y = x^2\}.$$

Să se arate că punctele $A, B, M$ sunt necoliniare pentru orice $M \in \mathcal{P}$. Să se arate că aria triunghiului $ABM$ are o valoare minimă şi să se determine această valoare minimă. Are aria triunghiului $ABM$ şi o valoare maximă?

5. Se consideră punctele $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ şi mulţimea

$$\mathcal{E} := \left\{M(x,y)\ :\ x^2 + 4y^2 = 1\right\}.$$

Să se arate că punctele $A, B, M$ sunt necoliniare pentru orice $M \in \mathcal{E}$. Să se arate că aria triunghiului $ABM$ are atât o valoare minimă cât şi o valoare maximă şi să se determine aceaste valori.