PROBLEME DE NUMĂRARE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva aspecte teoetice însoţite de probleme prin care se pun în evidenţă unele modalităţi de a se realiza numărarea în diferite situaţii.

Lecţia se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

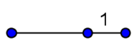
De la început trebuie să remarcăm faptul că problemele de numărare sunt în general probleme care nu se adresează unei clase anume. În cele mai multe cazuri rezolvarea unei probleme de numărare nu necesită cunoştiinţe foarte avansate de matematică. Pentru o mai bună înţelegere a temei vom rezolva împreună câteva probleme de acest gen pe care le vom comenta.

Problema 1: La începutul programului casiera de la casa de bilete a unui teatru constată că primul bilet vândut are numărul 25437. La sfârşitul programului aceasta constată că ultimul bilet vândut are numărul 25643. Câte bilete a vândut casiera?

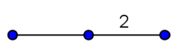
Soluţie: Vom gândi astfel: să presupunem că s-au vândut n bilete şi că primul bilet vândut este reprezentat de segmentul din figura de mai jos.

În continuare vom reprezenta prin segmente numerele celorlalte bilete vândute.

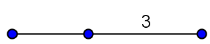
Biletul 2



Biletul 3

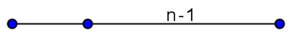


Biletul 4



Observând că la biletul 2 adunăm 1, la biletul 3 adunăm 2, la biletul 4 adunăm 3, putem afirma că la biletul n vom aduna $n-1$.

Biletul n



Cum numărul biletului 1 este 25437, iar numărul biletului n este 25643 înseamnă că $n-1 = 25643 - 25437$ sau $n-1 = 206$, de unde $n = 207$.

În concluzie s-au vândut 207 bilete.

Putem acum să răspundem la întrebarea: "Fie a şi b două numere naturale, $a < b$. Câte numere naturale avem de la a până la b?

Procedând ca mai sus întrebarea noastă poate avea trei răspunsuri.

1. Dacă sunt numărate şi numerele a şi b, atunci vom avea $b-a+1$ numere;

2. Dacă este numărat numai unul dintre numerele a şi b, atunci vom avea $b-a$ numere;

3. Dacă nu se numără nici a nici b, atunci vom avea $b-a-1$ numere.

Problema se poate rezolva asemănător şi în cazul în care numerele nu sunt consecutive , dar cresc cu aceeaşi valoare, r. În acest caz, dacă a şi b sunt primul, respectiv ultimul număr din secvenţă, atunci numărul de numere este egal cu $(b-a) : r + 1$.

Exemplu: Avem numerele 3; 7, 11; 15,...,51. Câte numere sunt în această secvenţă?

Se observă că, începând cu al doilea, fiecare număr este cu 4 mai mare decât precedentul. Atunci numărul de numere din secvenţă va fi $(51-3) : 4 + 1$, adică 13.

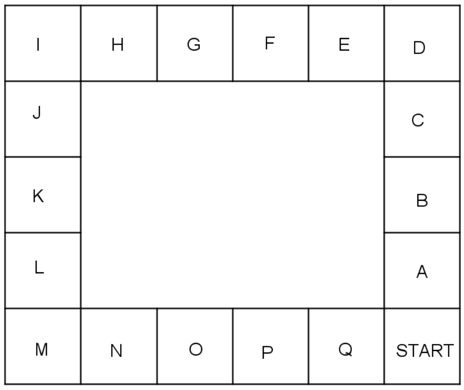
Problema 2: Câte numere de trei cifre se pot forma astfel încât cifra sutelor să fie 2, 4, 5 sau 7, cifra zecilor să fie 3 sau 5, iar cifra unităţilor să fie 0, 1, 2, 3 sau 4?

Soluţie: Gândim astfel. Cifra sutelor poate avea 4 valori: 2, 4, 5 sau 7. Pentru o valoare a cifrei sutelor (să zicem 2) cifra zecilor poate avea 2 valori: 3 sau 5. Înseamnă că atunci când am fixat şi cifra sutelor şi cifra zecilor avem 4×2 numere. Pentru fiecare dintre aceste numere cifra unităţilor poate avea 5 valori: 0, 1, 2, 3 sau 4. Rezultă că în total sunt $4 \times 2 \times 5$ numere, adică 40 de numere.

Problema de mai sus ne arată că dacă avem de efectuat mai multe operaţii succesive $(O_1, O_2, ..., O_p)$ şi fiecare operaţie poate fi efectuată într-un număr de moduri (O_1 în m_1 moduri, O_2 în m_2 moduri,...,O_p în m_p moduri), atunci sucesiunea tuturor operaţiilor poate fi efectuată în $m_1 \times m_2 \times ... \times m_p$ moduri.

În problema prezentată mai sus operaţiile succesive sunt: O_1: înlocuirea cifrei sutelor, iar numărul de moduri este $m_1 = 4$, O_2: înlocuirea cifrei zecilor, iar numărul de moduri este $m_2 = 2$ şi O_3: înlocuirea cifrei unităţilor, iar numărul de moduri este $m_3 = 5$.

Problema 3: Un ogar aleargă pe o pistă ca cea din figura de mai jos. La fiecare salt parcurge 4 căsuţe. În care căsuţă se va afla după 157 de salturi?



Soluţie: Ne gândim că pentru o numărare mai rapidă ar fi minunat ca după un număr de salturi ogarul să ajungă din nou în căsuţa de start. Să vedem dacă acest lucru se întâmplă. La saltul 1 ogarul este în căsuţa D; la saltul 2 se află în căsuţa H; la saltul 3 se află în căsuţa L; la saltul 4 se află în căsuţa P; la saltul 5 se află în căsuţa B; la saltul 6 se află în căsuţa F; la saltul 7 se află în căsuţa J; la saltul 8 se află în căsuţa N; la saltul 9 se află în căsuţa $START$. Deci, la fiecare 9 salturi ogarul revine în căsuţa $START$. Atunci ne întrebăm de câte ori se cuprinde 9 în 157? În urma împărţirii (157:9) obţinem câtul 17 şi restul 4. Asta înseamnă că ogarul face 17 ture de câte 9 salturi şi apoi mai face 4 salturi. După cele 17 ture se va afla în căsuţa $START$. Acum, până la cel de-al 157-lea salt mai are de efectuat 4 salturi. Deci se va afla în căsuţa P.

Să remarcăm că la acest gen de problemă munca ne-a fost uşurată de faptul că fenomenul se repetă după un număr de paşi, adică se ajunge în situaţia de la care s-a pornit.

Şi acum să rezolvăm împreună câteva probleme.

Problema 1. La un turneu de fotbal participă n echipe, care joacă fiecare cu fiecare câte un meci. Câte meciuri se joacă în total în turneu?

Soluţia 1: Să numim echipele $E_1,\ E_2,\ E_3,\ ...\ E_n$.
Pentru început avem meciurile:

E_1 cu E_2, E_1 cu E_3, E_1 cu E_4, ..., E_1 cu E_n, în total $n-1$ meciuri.

Apoi,

E_2 cu E_3, E_2 cu E_4, E_2 cu E_5, ..., E_2 cu E_n, în total $n-2$ meciuri.

Atenţie! E_2 a jucat deja cu E_1.
În continuare avem

E_3 cu E_4, E_3 cu E_5, E_3 cu E_6, ..., E_3 cu E_n, în total $n-3$ meciuri.

....

E_{n-1} cu E_n adică 1 meci.

Atunci, numărul total de meciuri va fi

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1).$$

Rezultatul acestei sume este, aşa cum ne-a învăţat Gauss, $n(n-1) : 2$.

Soluţia 2: Problema poate fi privită şi astfel: *Orice meci se desfăşoară între două echipe.*

Atunci, prima echipă poate fi aleasă în n moduri, iar a doua echipă în $n-1$ moduri.

Atenţie! În acest fel meciurile au fost numărate de două ori. Am numărat şi E_1 cu E_2, dar şi E_2 cu E_1, etc.

Acestea fiind spuse, folosind *regula produsului*, numărul de meciuri este $n(n-1) : 2$.

Comentariu. Cele două rezolvări pot reprezenta o justificare a faptului că

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = n(n-1) : 2.$$

Problema 2. Se consideră tabloul pătratic

1	2	3	...	25
26	27	28	...	50
51	52	53	...	75
...	...	...	...	...
601	602	603	...	625

Aflaţi numărul scris în centrul tabloului.

Soluţie. Trebuie să stabilim în primul rând care este centrul acestui tablou. Evident tabloul are 25 de coloane şi tot atâtea linii (rânduri). Înseamnă că centrul tabloului este acolo unde se intersectează coloana a treisprezecea cu linia a treisprezecea.

Pe fiecare linie numerele sunt consecutive. Astfel pe locul doi este numărul de pe primul loc plus 1, pe locul trei este numărul de pe primul loc plus 2 şi aşa mai departe. Pe locul 13 va fi numărul de pe primul loc plus 12.

Să vedem acum care este numărul cu care începe linia a treisprezecea.

Observăm

Linia 1 începe cu 1, iar $1 = 25 \cdot 0 + 1$

Linia 2 începe cu 26, iar $26 = 25 \cdot 1 + 1$

Linia 3 începe cu 51, iar $51 = 25 \cdot 2 + 1$

....

Linia 25 începe cu 601, iar $601 = 25 \cdot 24 + 1$

Atunci

Linia 13 începe cu $25 \cdot 12 + 1 = 301$.

În aceste condiţii numărul din centrul tabloului va fi

$$301 + 12 = 313.$$

Problema 3. Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său. Câte numere *palindrom* de 5 cifre există.

Soluţie. Dacă numărul este *palindrom*, atunci are forma $\overline{abcba}$, unde cifrele a, b, c pot fi şi egale. Deoarece a poate fi înlocuită cu 9 cifre (nu poate fi 0), b poate fi înlocuit cu 10 cifre, iar c tot cu 10 cifre, înseamnă că vom avea

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

de numere *palindrom*.

Problema 4. Pe 1 ianuarie 2005 două vapoare pleacă din portul Constanţa. Primul stă pe mare 15 zile, se întoarce pentru 3 zile, apoi pleacă din nou în cursă. Al doilea stă pe mare 20 de zile, se întoarce pentru 4 zile, apoi pleacă din nou în cursă.

a) De câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare vor pleca simultan din Constanţa?

b) Câte zile din 2005, cele două vapoare se vor afla în port în acelaşi timp?

Soluţie. a)Vom numi PAS numărul de zile petrecute pe mare plus numărul de zile petrecute în port de un vapor.

Pentru primul vapor 1 PAS are 18 zile (15+3), iar pentru al doilea vapor 1 PAS are 24 de zile (20+4).

Numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port înseamnă un număr întreg de PAŞI parcurşi de cele două vapoare. Asta înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană este atât multiplu al lui 18 cât şi multiplu al lui 24. Altfel spus, dacă primul vapor face n PAŞI, iar al doilea m PAŞI, atunci

$$18 \cdot n = 24 \cdot m$$

sau, prin împărţire la 6 avem

$$3 \cdot n = 4 \cdot m$$

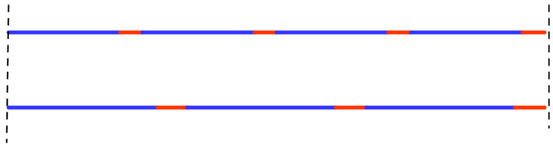
Trebuie găsite cele mai mici numere naturale pentru care egalitatea de mai sus este adevărată. Se observă imediat că pentru $n = 4$ şi $m = 3$ egalitatea este adevărată.

Înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port este 72 ($18 \cdot 4$ sau $24 \cdot 3$).

Pentru a vedea de câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare pleacă simultan din port trebuie să vedem de câte ori se cuprinde 72 în 365 (numărul de zile dintr-un an).

Cum 365 împărţit la 72 dă câtul 5 şi restul tot 5 înseamnă că vapoarele pleacă simultan din port de 6 ori (Să nu uităm de plecarea de la 1 ianuarie!)

b) În desenul de mai jos am reprezentat ce se întâmplă într-un interval de 72 de zile. Segmentele albastre reprezintă numărul zilelor petrecute pe mare, iar segmentele roşii reprezintă numărul zilelor petrecute în port.



Se observă că singura perioadă când cele două vapoare se află în acelaşi timp în port este la sfârşitul celor 72 de zile. Cele două vapoare stau în acelaşi timp în port timp de 3 zile.

Cum cele două vapoare pleacă simultan din port de 5 ori (aici nu trebuie să mai numărăm plecarea din 1 ianuarie) înseamnă că ele se vor afla în acelaşi timp în port timp de

$$3 \cdot 5 = 15 \ (\ zile\ )$$

Bibliografie:

[1] Ghioca A, Cojocaru L, Matematica gimnazială dincolo de manual, Editura GIL, 2005

[2] Schwarz D, Popa G, Probleme de numărare, Editura GIL, 2007