REVISTA SCOLII GIMNAZIALE BALCESTI

Nr. 41 2022

COLECTIVUL DE REDACŢIE

COORDONARE:
FONDATOR BOGDAN CONSTANTIN
REDACTOR- ŞEF: COJAN GEORGIANA , CEPOI DELIA ,
CONSULTANT: COJOCARU MIHAELA , RADOI CARMEN

TEHNOREDACTARE:OPREA RADU, IENCUT CRISTINA

CORECTOR:COJAN GEORGIANA

PUBLICARE REVISTA:BOGDAN CONSTANTIN

Adresa redactiei:
BALCESTI ,
COMUNA
BENGESTI
CIOCADIA

E. TEMATICA PENTRU DISCIPLINA DE CONCURS MATEMATICA INVATATORI TITULARIZARE

1. Elemente de teoria multimilor

o1 Notiunea de multime: element, apartenenta, reprezentarea multimilor Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

1.2.1. Noţiunea de mulţime: element, apartenenţă, proprietăţi

Mulţimile vor fi notate, în general, cu litere mari din alfabetul latin: *A, M, X* etc, iar părţile componente ale acestora vor fi numite e*lemente ale mulţimilor* şi vor fi notate în general cu litere mici din alfabetul latin: *a, m, x* etc.

Cuvântul „element" va însemna fie obiectul a cărui apartenenţă la mulţime se examinează, fie simbolul acelui obiect.

Din punctul de vedere al modului în care este dată o mulţime, distingem două cazuri:

a) Mulţimi date prin evidenţierea unei proprietăţi pe care o au toate elementele mulţimii respective şi pe care o au toate obiectele (elementele):

A=mulţimea copiilor dintr-o sală; B=mulţimea studenţilor din România; C=mulţimea literelor din alfabetul grec;

D=mulţimea punctelor de pe o dreaptă (o infinitate de punte);

F=mulţimea atomilor din Univers (o infinitate de particule);

b) *Prin enumerarea elementelor componente* (simbolurile lor fiind scrise într-o acoladă):

M={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, mulţimea cifrelor arabe;

T={a_1, a_2, ..., a_n}, mulţimea formată din n elemente notate cu simbolurile a_1, a_2, ..., a_n.

Observaţii: În scrierea unei mulţimi, elementele fiind distincte, un element se trece o singură dată. Spre exemplu, scrierea {a, b, a} nu este corectă, căci elementul a este trecut de două ori.

O mulţime poate avea un număr neşfârsit (o infinitate) de elemente (A, B, C, M, P, V, T), un singur element (G) sau nici un element (H, I); mulţimea care nu conţine nici un element se numeşte *mulţime vidă* şi se notează „Ø".

de legătură folosit în teoria mulţimilor.

Dacă „elementul *a* aparţine multimii A”, acesta se scrie: „$a \in A$”.

Dacă „elementul *a* nu aparţine mulţimii A”, acesta se scrie: „$a \notin A$”.

o2 Relatia de incluziune, egalitatea intre multimi   Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

1.2.2.Relaţia de incluziune, egalitate între mulţimi

Relaţiade incluziune

Dacă orice element x al unei mulţimi A este şi element al altei mulţimi E, atunci spunem că mulţimea A este o submulţime (sau o parte) a mulţimii E, ceea ce se scrie:
$A \subset B$

şi se citeste „mulţimea A este inclusă (conţinută) în mulţimea E”.

Folosind scrierea cu simboluri, dacă A este o submulţime inclusă sau egală cu E, avem: $A \subseteq B$

Exemple:

- Daca A= {1, 2, 5, 6} şi E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} atunci avem $A \subset E$.

1. Referindu-ne la mulţimile de numere ***N, Z, Q, R***, între ele avem relaţiile de incluziune:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ sau $N_{2k} \subset \mathbf{N}$; $N_{2k+1} \subset \mathbf{N}$; $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$

2. Daca vom considera două intervale de numere reale

A=[3,6] şi B=[2, 9], se observă uşor pe axa numerelor reale că $A \subset B$.
A={x|p(x)} adică ”A este mulţimea acelor elemente x pentru care are loc p(x)”.

Egalitatea mulţimilor

Două mulţimi A şi B sunt egale atunci când sunt formate din aceleaşi elemente.

Aceasta înseamnă că toate elementele mulţimii A aparţin şi mulţimii B ($A \subset B$) şi toate elementele mulţimii B aparţin şi mulţimii A ($B \subset A$).

1. A={1, 3, 5, 7, 9}

B=Mulţimea primelor numere impare, până la 10. Evident avem

A=B pentru că B={1, 3, 5, 7, 9}.

Două mulţimi egale sunt echivalente, dar două mulţimi echivalente nu sunt neaparat egale.

o3 Submultimi; determinarea unor submultimi Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

SUBMULȚIMI:

*O rugăminte am și eu: **Dă te rog un share -o distribuire(la acest articol și la articolele postate pe acest blog) pe facebook în diverse grupuri(sau pe alte rețele de socializare) ca să știe cât mai mulți de existența acestor materiale! MULȚUMESC!****

Definiție: Spunem că mulțimea A este SUBMULȚIME a mulțimii B dacă orice element care aparține mulțimii A aparține și mulțimii B. NOTĂM **A⊂B** și citim „mulțimea A este INCLUSĂ în mulțimea B" sau „mulțimea A este submulțime a mulțimii B". În caz contrar spunem că mulțimea A nu este submulțime a mulțimii B și notăm A⊄B (citim „mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B" sau „A nu este submulțime pentru B").

Exemple: Pentru A={2,4,6} si B={1,2,3,4,5,6} =>A⊂B.

Pentru A={1,2,3} si B={0,2,9,15} =>A⊄B.

Să ne reamintim! a)***Numărul de elemente ale unei mulțimi M se numește cardinalul mulțimii M și se notează card M. EXEMPLU: Mulțimea A={1,2,6,7,19} conține 5 elemente, așadar card A=5. b)Mulțimea care nu are niciun element se numește MULȚIMEA VIDĂ și se notează cu Ø.***

OBSERVAȚII SUBMULȚIMI! a)Orice mulțime este propria ei submulțime; b)Mulțimea vidă este submulțime pentru orice mulțime; c)**O mulțime A cu n elemente**, unde n este număr natural, **admite** 2^n (**2 la puterea n**) **SUBMULȚIMI**! Exemplu: Câte submulțimi admite mulțimea B={0,5,9,10}? R:Mulțimea B admite 2 la puterea 4 submulțimi =16 submulțimi. d)Două mulțimi A și B sunt egale dacă și numai dacă A⊂B și B⊂A!

EX.1) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a){i,j,k,l}={l,i,j,k,m}; b){1,3,5,7}≠{1,3,5,9}; c){m,ă}⊂{t,e,m,ă}.

REZOLVARE EX.1):

a){i,j,k,l}={l,i,j,k,m} -FALS;

b){1,3,5,7}≠{1,3,5,9} -ADEVĂRAT;

c){m,ă}⊂{t,e,m,ă}-ADEVĂRAT.

EX.2) Precizați câte submulțimi conține mulțimea A={0,5,10,15,20,200}.

REZOLVARE EX.2) A={0,5,10,15,20,200}:

cardA=6. Mulțimea A conține 6 elemente=> Mulțimea A admite „2 la puterea a-6-a" submulțimi =2•2•2•2•2•2= 64 de submulțimi.

EX.3) Scrieți toate submulțimile mulțimii A={1,2,3}.

REZOLVARE EX.3) **A={1,2,3}:**

Submulțimile lui A sunt: A1={1}, A2={2}, A3={3}, A4={1,2}, A5={1,3}, A6={2,3}, A7={1,2,3} și A8={Ø}. Sunt în total 8 submulțimi. Verificarea numărului corect de submulțimi se face ca la exercițiul 2: **A={1,2,3}**=>Mulțimea A conține 3 elemente=> Mulțimea A admite „2 la puterea a-3-a" submulțimi =2•2•2= 8 submulțimi.

EX.4) Fie mulțimile C={x∈*N/x≤4} și D={z∈*N*/z=4-x,x∈*C*}. Verificați dacă C≠D.**

REZOLVARE EX.4) C={x∈*N/x≤4} și D={z∈*N*/z=4-x,x∈*C*}:**

C={x∈*N/x≤4}={1,2,3,4}.**

D={z∈*N*/z=4-x,x∈*C*}

x=1=>z=4-x=4-1=>z=3;

x=2=>z=4-x=4-2=>z=2;

x=3=>z=4-x=4-3=>z=1;

x=4=>z=4-x=4-4=>z=0 =>D={3,2,1,0}. Cum C={1,2,3,4}=>**C≠D.**

EX.5) Determinați cardinalul mulțimii E dacă mulțimea E are 32 de submulțimi.

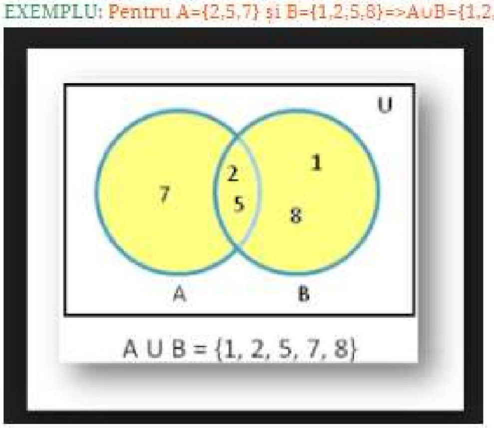
REZOLVARE EX.5) Mulțimea E are 32 de submulțimi. Dar numărul de submulțimi ale unei mulțimi este egal cu „2 la puterea n", unde n reprezinta cardinalul acelei mulțimi. Așadar 2^n=32=>n=5. (2^n înseamnă „2 la puterea n". Cum „2 la puterea a 5-a" este 32 rezultă că n este egal cu 5).

o4 Operatii cu multimi: reuniunea; intersectia; diferenta. Complementara unei multimi. Produsul cartezian. Proprietatile operatiilor cu multimi

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

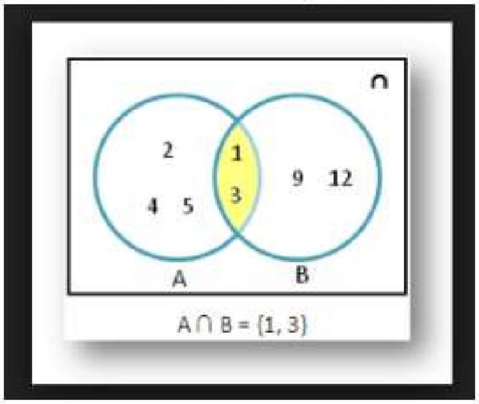
Operații cu MULTIMI:

A) REUNIUNEA MULȚIMILOR:

- *Reuniunea mulțimilor A și B este **mulțimea notată A∪B** (citim „A reunit cu B"), care **este formată din toate elementele celor două mulțimi**(cele comune luate o singură dată).*
- REUNIUNEA: A∪B={x/x∈A sau x∈B};
- EXEMPLU: Pentru A={2,5,7} și B={1,2,5,8}=>A∪B={1,2,5,7,8}.
- 

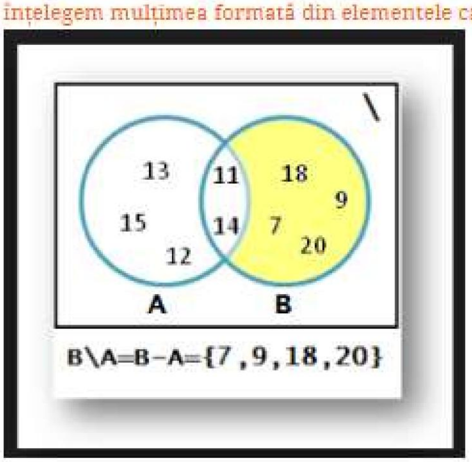
B) INTERSECȚIA MULȚIMILOR:

- *Intersecția mulțimilor A și B este **mulțimea notată** A∩B (citim „A intersectat cu B"), care **este formată din elementele COMUNE celor două mulțimi.***
- INTERSECȚIA: A∩B={x/x∈A și x∈B};
- EXEMPLU: Pentru A={1,2,3,4,5} și B={1,3,9,12}=>A∩B={1,3}.



C) DIFERENȚA MULȚIMILOR:

- *Diferența mulțimilor A și B este **mulțimea notată A\B** (citim „A minus B"), care **este formată din elementele primei mulțimi care nu se găsesc în a doua mulțime.**Putem nota și A-B..*
- DIFERENȚA: A\B={x/x∈A și x∉B};
- EXEMPLU: Pentru A={11,12,13,14,15} și B={7,9,11,14,18,20}=> Prin A\B(sau A-B) înțelegem mulțimea formată din elementele care se găsesc în mulțimea A și nu se găsesc în mulțimea B. Adică A\B=A-B={12,13,15}. Prin B\A(sau B-A) înțelegem mulțimea formată din elementele care se găsesc în B și nu se găsesc în A. Adică B\A=B-A={7,9,18,20}.



D) PRODUSUL CARTEZIAN:

- *Produsul cartezian (**AXB** -citim „A ori B") este mulțimea formată din toate perechile ordonate formate luând primul element din prima mulțime și al doilea element din a doua mulțime.*
- PRODUSUL CARTEZIAN: AxB={(a,b)/a∈A și b∈B};
- EXEMPLU: Pentru A={2,6,9} și B={0,2,8,10}=> AxB={(2,0),(2,2),(2,8),(2,10),(6,0),(6,2),(6,8),(6,10),(9,0),(9,2),(9,8),(9,10)}.

FIȘĂ DE LUCRU –OPERAȚII CU MULȚIMI:

- **EX.1) Se consideră mulțimile A={e,f,g} și B={a,e,g,h}.**
- **Determinați: a)A∪B; b)A∩B; c)B-A; d)A\B.**

- **EX.2)** Se consideră mulțimile A={0,2,4,6} și B={2,3,4}.
- **Determinați: a)A∪B; b)A∩B; c)B-A; d)A\B; e)BXA; f)AXB.**
- **EX.3) Fie mulțimile C={x∈N*/x≤4} și D={x∈N/x<3}.**
- **Verificați dacă:**
- **(D∩C)\D=(D\C)∩D.**
- **EX.4) Determinați mulțimile E și F dacă îndeplinesc simultan condițiile:**
- **E∪F={3,4,5,6,7,8}, E∩F={3,4,5} și E\F={6,7}.**

Exerciții rezolvate -FIȘĂ DE LUCRU –OPERAȚII CU MULȚIMI:

- **REZOLVARE EX.1): A={e,f,g} și B={a,e,g,h}.**
- **a)A∪B={a,e,f,g,h};**
- **b)A∩B={e,g};**
- **c)B-A={a,h};**
- **d)A\B={e}.**
- **REZOLVARE EX.2): A={0,2,4,6} și B={2,3,4}.**
- **a)A∪B={0,2,3,4,6};**
- **b)A∩B={2,4};**
- **c)B-A={3};**
- **d)A\B={0,6};**
- **e)BXA={(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(3,0),(3,2),(3,4),(3,6),(4,0),(4,2),(4,4),(4,6)};**
- **f)AXB={(0,2),(0,3),(0,4),(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(4,3),(4,4),(6,2),(6,3),(6,4)}.**
- **REZOLVARE EX.3): C={x∈N*/x≤4} și D={x∈N/x<3}.**
- Așadar C={1,2,3,4} și D={0,1,2}.
- D∩C={1,2}, D={0,1,2} =>**(D∩C)\D={∅}.**
- D\C={0}, D={0,1,2} =>**(D\C)∩D={0}.**
- **În concluzie: (D∩C)\D≠(D\C)∩D.**
- **REZOLVARE EX.4): E∪F={3,4,5,6,7,8}, E∩F={3,4,5} și E\F={6,7}:**
- **E\F={6,7} =>Doar mulțimea E conține elementele 6 și 7.**
- **E∩F={3,4,5} =>Elementele 3, 4 și 5 se găsesc și în E și în F. Din reuniune ar rămâne că 8 se găsește în F.**
- **Așadar E={3,4,5,6,7} și F={3,4,5,8}.**

o5 Relatia de echipotenta; cardinalul unei multimi   Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

2. MULTIMEA NUMERELOR NATURALE.

2.1. Relatia de echipotenta

2.2. Cardinalul unei multimi

Definiție. Fie A si B multimi. Spunem ca multimile Asi B sunt ***echipotente*** daca exista o functie bijectiva $f : A \to B$. Notam prin $A \approx B$ faptul ca A si B sunt echipotente.

Exemplu.

Daca A={1,2,3}, B={ a,b,c}, atunci $f : A \to B$ definita prin f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c este bijectiva, deci A si B sunt echipotente.

Teoremă.

Relatia "$\approx$" este o relatie de echivalenta.

Demonstraţie.

Reflexivitatea: $A \approx A$ rezulta din faptul ca $1_A : A \to A, 1_A(x) = x, \forall x \in A$ este bijectiva.

Simetria: $A \approx B \quad \Rightarrow B \approx A$ rezulta din faptul ca daca $f : A \to B$ este bijectiva, atunci si $f^{-1} : B \to A$ este bijectiva.

Tranzitivitatea: ($A \approx B$ si $B \approx C$) $\Rightarrow A \approx C$ rezulta din faptul ca daca $f : A \to B$ si $g : B \to C$ sunt functii bijective atunci si $g \circ f : A \to C$ este bijectiva.

Relatia "$\approx$" fiind reflexiva, simetrica si tranzitiva, inseamna ca este o relatie de echivalenta, deci împarte multimile în clase de echivalenta.

O clasa de echivalenta, definita de relatia de echipotenta, se noteaza prin simbolul $|\ |$ si se numeste numar *cardinal* sau *puterea* fiecarei multimi din clasa respectiva.

Daca multimile *A*,*B* sunt echipotente, ele au aceeasi putere si li se asociaza acelaai numar cardinal.

Notam cardinalul multimii *A* cu $|A|$.

Prin definitie, $|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B$.

Observatie

O modalitate mai simpla de a intelege notiunea de cardinal al multimii *A* este de a gandi $|A|$ ca reprezentand numarul de elemente ale multimii *A*.

În cele ce urmeză vom da câteva detalii referitoare la introducerea noţiunii de *cardinal*. Considerăm o relaţie de echivalenţă (care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă) între mulţimi oarecare (relaţia de echipotenţă).

Definiţie. Două mulţimi A şi B e numesc echipotente şi scriem A~B dacă există o aplicaţie bijectivă f: A→B. Relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă pe clasa tuturor mulţimilor. Într-adevăr:

- Pentru orice mulţime A avem A~A deoarece aplicaţia identică 1_A: A→A este bijectivă.
- Dacă f: A→B este o aplicaţie bijectivă, aplicaţia inversă f^{-1} : B→A este de asemenea bijectivă şi aceasta arată că A~B $\Rightarrow$B~A.

- Compunerea a două aplicaţii bijective este de asemenea o aplicaţie bijectivă, şi aceasta arată că din

  $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Definiţie. Clasele de echivalenţă modulo relaţia de echipotenţă se numesc *numere cardinale*. Mai precis, pentru orice mulţime A, clasa de echivalenţă a lui A modulo-relaţia de echivalenţă se notează cu $|A|$ şi se numeşte cardinalul (sau număr cardinal) al mulţimii A. Deci, cardinalul mulţimii A este clasa tuturor mulţimilor echipotente cu A.

Exemple.

- Cardinalul mulţimii vide Ø este numărul (cardinal) 0.
- Cardinalul mulţimii vide {0} este numărul (cardinal) 1.
- Cardinalul mulţimii {0,1} este numărul (cardinal) 2 etc. Să reţinem faptul că pentru

două mulţimi A şi B avem

$$|\mathbf{A}| = |B| \Leftrightarrow A \sim B.$$

A_1={1, 2, 3, 4}; card(A_1)=4

A_2= {roşu, negru, galben, verde}; card(A_2)=4

A_3= {est, vest, sud, nord}; card(A_3)=4

A_4={luni, marţi, miercuri, joi}; card(A_4)=4

- Mulţimea numerelor naturale (N) şi mulţimea numerelor pare (N_{2k}) sunt echivalente (au aceeaşi putere) pentru că între ele se poate stabili o corespondenţă biunivocă astfel:

$$\begin{array}{l} N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,\ \dots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ N_{2k} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \dots,\ 2n,\ \dots\} \end{array}$$

- Mulţimea numerelor naturale (N) este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale impare (N_{2k+1}), deci au aceeaşi putere:

$$\begin{array}{l} N \ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,\ \dots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow \qquad \updownarrow \\ N_{2k+1} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots,\ 2n+1,\ \dots\} \end{array}$$

Definiţie. O mulţime infinită ale carei elemente se pot numerota, punându-se în corespondenţă biunivocă cu şirul natural, se numeşte *numărabilă*.

Deci *toate mulţimile care au aceeaşi putere (echivalente) cu mulţimea numerelor naturale sunt numărabile.* Spre exemplu, mulţimea numerelor

pare, mulţimea numerelor impare, mulţimea numerelor prime şi, în general,

2. Multimi de numere
Multimea numerelor naturale (N); multimea numerelor intregi (Z); multimea numerelor rationale (Q); multimea numerelor irationale (ℝ\Q)
Numere naturale
o Axiomele lui Peano

2.3. Axiomele lui Peano

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Multimea numerelor naturale constituie un sistem (*N*,0,*f*) format dintr-o multime *N*, un element fixat $0 \in N$ al sau si o functie $f : N \to N$ (numita funie de succesiune) pentru care sunt satisfacute urmatoarele axiome:

P1) $n \in N \Rightarrow f(n) \neq 0$ (0 nu este succesorul nici unui numar natural)

P2) daca $n, m \in N, f(n) = f(m)$, atunci $n = m$

P3) daca $M \subset N$ si $0 \in M$ si $(n \in M \Rightarrow f(n) \in M)$ atunci $M = N$

Elementul 0 poarta numele *zero*.

Observatie

Axioma P3) sta la baza demonstratiei prin inductie.

Teoremă. Fie (*N*,0,*f*) un sistem Peano. Atunci:

1) $\forall y \in N, y \neq 0, \exists x \in N$ astfel încât *y*=*f*(*x*);

2) Oricare ar fi tripletul $(M, \overline{0}, g)$ format cu o multime nevida *M*, un element $\overline{0} \in M$ si o functie $g : M \to M$, exista o unica functie $h : N \to M$, astfel încât $h(0) = \overline{0}$ si *h*o*f*=*g*o*h*, adics *h*(*f*(*x*))=*g*(*h*(*x*)), $\forall x \in N$.

3) Daca $(M, \overline{0}, g)$ este de asemenea un sistem Peano, atunci *f* este functie bijectiva.

Notam $f(n) = n^+$.

Presupunem îndeplinite axiomele P1) – P3) pentru o multime *N* oarecare. Notam 0^+ prin 1, 1^+ prin 2, 2^+ prin 3, . . . ceea ce conduce la: **N**={0,1,2,3, . . . , *n*, . . . }

Elementele multimii ***N*** se numesc ***numere naturale***. Numerele 0, 1, 2, 3, . . . se numesc respectiv ***zero, unu, doi, trei, . . .*** si sunt folosite pentru a exprima cantitatea de elemente pentru multimile fara nici un element, cu un element, cu un element si înca un element, . . .

Axiomele P1)-P3) poarta numele ***axiomele lui Peano*** si mai pot fi formulate astfel:

P1) 0 nu este succesorul nici unui numar natural;

P2) numere naturale diferite au succesori diferiti;

P3)daca M este o submultime a lui N care contine pe 0 si daca contine pe n va contine si pe n+ (succesorul sau), atunci M=N

Observatii

- Orice numar natural n afara de 0 este succesorul unui alt numr natural numit *precedent* al lui n.
- În continuare notam $\boldsymbol{N}\setminus\{0\}$ prin $\boldsymbol{N}^*$.

o Sisteme de numeratie: sistem pozitional (scrierea in baza 10) si sistem nepozitional (scrierea cu cifre romane)

2.4. Sisteme de numeraţie

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Defintie.

Se numeste ***sistem de numeraţie*** totalitatea regulilor de reprezentare a numerelor folosind un anumit set de simboluri diferite, numit alfabet.

Dupa felul de grupare si ordonare a semnelor, se deosebesc doua sisteme de numeratie:

a) sisteme de numeratie nepozitionale.

b) sisteme de numeratie pozitionale.

a) Sisteme de numeratie nepozitionale.

Cel mai cunoscut sistem de numeratie nepozitional este sistemul de numeratie roman care foloseste urmatoarele semne (cifre romane):

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Reguli de scriere cu cifre romane.

În cadrul unui numar scris în sistemul roman *nu pot să apară mai mult de trei semne consecutive de acelaşi fel.*

De aceea

- orice semn pus la stânga altuia de valoare mai mare decât a lui, se scade.

Astfel, urmatoarele numere se scriu cu doua semne, primul reprezentând un numr care se scade din al doilea:

IV	IX	XL	XC	CD	CM
4	9	40	90	400	900

- -orice semn pus la dreapta altuia de valoare mai mare sau egala decât a lui, se aduna.

Un numar oarecare pâna la 4000 se scrie alaturând numere scrise mai sus începând cu cel mai mare.

Exemple.

LXXXIV=50+10+10+10+4=84;

MMCDXXVIII=2428.

Pentru numere mai mari de 4000, indicam numarul miilor punând deasupra numarului de mii o linie, deasupra numarului zecilor de mii doua linii s.a.m.d.

Exemplu.

$$\overline{IV}C = 4100$$

$$\overline{\overline{XII}}\,\overline{CDX}DC = 12410600$$

b) *Sisteme de numeratie pozitionale.*

În sistemele de numeratie pozitionale, un simbol din alcatuirea unui numar (cifra) are valoare intrinseca dar si o valoare prin pozitia pe care o ocupa un numar. Aceasta implica existenta unui simbol cu valoare intrinseca nula (zero). În unele din sistemele pozitionale (spre exemplu babilonian) în care regulile o permit, este posibil sa se renunte la acest simbol. În continuare prezentam sistemul de numeratie indian care foloseste urmatoarele semne (cifre arabe): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (de altfel fiind sistemul de numeratie folosit în prezent).

Principiul numeratiei de pozitie.

Fie un numar natural *a*, pe care îl numim baza a sistemului de numeratie.

Teoremă. Orice număr natural N poate fi scris sub forma

$$N = x_n \cdot a^n + x_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot a + x_0 \cdot a^0,$$

unde numerele x_k sunt numere naturale care verifică relaţia

$$0 \le x_k \le a-1, k = 1,2,\ldots,n \text{ şi a>1.}$$

Demonstraţie.

Admitând ca expresia exista, vom nota

$$R_k = x_k \cdot a^k + x_{k-1} \cdot a^{k-1} + \ldots + x_1 \cdot a + x_0 \cdot a^0$$

$$N - R_k = x_n \cdot a^n + x_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + x_{k+1} \cdot a^{k+1} = Q_k \cdot a^{k+1}$$

Q_k si R_k sunt câtul si restul împartirii lui N la a^{k+1}, fiindca avem

$$R_k \leq (a-1)\cdot a^k + (a-1)\cdot a^{k-1} + \ldots + (a-1)\cdot a + (a-1)\cdot a^0 = a^{k+1} - 1$$

Vom defini coeficientii x_k din aproape în aproape, în ordinea descrescatoare a indicilor, luând drept x_n – câtul împartirii lui N la a_n, drept $x_n a + x_{n-1}$ – câtul împartirii lui N la a^{n-1}, drept $x_n a^2 + x_{n-1}a + x_{n-2}$ – câtul împartirii lui N la a^{n-2}, etc.

Se obtine astfel singura solutie posibila daca aceasta exista. Or numerele x_k introduse sunt realmente mai mici decât a, daca n a fost definit prin $a^n \leq N < a^{n+1}$.

În fine, ultima împartire, cea de la a, da pe x_0 si demonstreaza ca expresia obtinuta este apta sa reprezinte pe N.

Deci, exista o corespondenta biunivoca între numerele N care verifica $a^n \leq N < a^{n+1}$ si sirurile de $n+1$ numere x_i, $0 \leq x_i < a$.

Supraliniind pentru a evita confuzia cu un produs, vom scrie :.

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \ldots x_0)_{(a)}}$$

Se spune ca N este scris în baza a, iar daca a=10 vom spune ca numarul este scris în baza zece.

Astfel am fundamentat ideea de scriere a unui numar natural în baza a :

$$N = \overline{(x_n x_{n-1} \ldots x_0)_{(a)}} = x_n \cdot a^n + x_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot a + x_0 \cdot a^0$$

Baze de numeratie

Sistemul de numeratie folosit in mod curent este sistemul alcatuit din zece cifre : 0,1,2,…,9. Acest sistem se numeste sistem zecimal sau sistem de numeratie cu baza 10.

Este evident faptul ca acest sistem de numeratie a inceput sa fie folosit ca o conventie. Era nevoie de un sistem de numeratie si acest sistem a fost considerat a fi util. Este insa clar ca, la fel de bine, s-ar fi putut alege un sistem de numeratie care sa contina un numar mai mic sau mai mare de cifre.

Desi in mod curent se foloseste si in zilele noastre tot sistemul zecimal, exista o serie de aplicatii in care alte sisteme au o utilitate mult mai mare. De exemplu, in informatica, foarte folosit este sistemul binar, care utilizeaza cifrele 0 si 1.

Din punct de vedere matematic, se pot folosi diverse sisteme de numeratie : baza 2 (care foloseste cifrele 0 si 1), baza 3 (cifrele 0, 1, 2), si asa mai departe.

Pentru a putea lucra insa cu diversele baze, este nevoie sa se cunoasca modalitatile de transformare ale unui numar dintr-o baza in alta.

Inainte de a trece la modalitatile de transformare dintr-o baza oarecare in alta baza, vom mai preciza cateva aspecte pentru o mai buna intelegere a acestor notiuni.

In baza zece, se folosesc 10 simboluri numite cifre : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Orice numar scris in sistemul zecimal este format prin alaturarea unora din aceste cifre, care pot fi folosite o data, de doua, ori, sau de mai multe ori.

Numerele formate din cate o singura cifra sunt usor de obtinut. Daca este nevoie de un numar care sa fie superior lui 9, va mai aparea inca o cifra in cadrul numarului. 10 unitati formeaza o zece si aceasta va implica folosirea a doua cifre in cadrul numarului. 10 zeci formeaza o suta, 10 sute formeaza o mie. Procedeul poate continua.

Gruparea de cate 10 unitati de acelasi fel pentru obtinerea unei unitati superioare nu este intamplator. Alegem 10 unitati, tocmai pentru ca lucram in baza 10. Daca am lucra in baza 5, am alege cate 5 unitati in loc de 10.

Sa consideram, de exemplu, numarul 536 scris in baza 10. Acesta este format din 5 sute, 3 zeci si 6 unitati. Rezulta de aici ca putem sa scriem numarul ca fiind suma dintre cele 5 sute, 3 zeci si 6 unitati care il alcatuiesc :

$$536 = 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Putem sa scriem acest calcul folosind puterile lui 10. Avem 100 ca fiind de fapt 10 la puterea a doua, 10 este 10 la puterea intai si 1 este 10 la puterea 0. astfel, numarul ales poate fi scris in felul urmator :

$$536 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Observam de aici ca un numar poate fi scris cu ajutorul cifrelor si al puterilor lui 10.

De exemplu, sa consideram numarul scris sub forma generala : $\overline{abc}$. Acesta va putea fi scris astfel :

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \cdot 1$$

Daca numarul ar avea mai multe cifre in componenta sa, lucrurile ars ta exact la fel :

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \cdot 1$$

Scrierea de mai sus o numim descompunerea numarului $\overline{abcdef}$.

Transformarea unui numar din baza 10 intr-o alta baza

Asa cum am spus mai sus, daca lucram intr-o alta baza, de exemplu baza 7, va trebui ca, in loc sa grupam unitatile in grupuri de cate 10 sa le grupam in grupuri de cate 7. Pentru aceasta vom folosi impartiri succesive ale numarului scris in baza 10 la numarul corespunzator noii baze.

Exemplu

Dorim sa transformam numarul 346 din baza 10 in baza 5.

Impartim numarul 346 la 5. Obtinem catul 69 si restul 1. Aceasta inseamna ca am obtinut 69 de unitati de cate 5 si 1 unitate simpla. Rezulta de aici ca cifra unitatilor numarului scris in baza 5 va fi 1 (ultima cifra a numarului). Reluam procedeul cu cele 69 unitati ramase. Impartim 69 la 5 si obtinem catul 13 si restul 4. Penultima cifra a numarului scris in baza 5 va fi 4. Impartim 13 la 5 si obtinem catul 2 si restul 3. Antepenultima cifra a numarului va fi 3. Catul obtinut de aceasta data este dat de o cifra care apartine sistemului cu baza 5, deci oprim algoritmul si acest cat ne indica prima cifra a numarului. Rezulta ca, scris in baza 5, numarul 346 devine 2341.

Pentru a putea urmari mai usor acest algoritm, vom face impartirile succesive in felul urmator :

346	5		
30	69	5	
46	5	13	5
45	19	10	**2**
1	15	**3**	
	4		

In aceasta modalitate de a scrie impartirile, se observa ca au fost puse in evidenta resturile obtinute pe parcurs si ultimul cat. Acestea, luate in ordinea inversa scrierii lor, adica de la dreapta spre stanga, vor indica numarul scris in baza 5 : 2341.

Pentru a indica faptul ca 2341 determinat de noi este scris in baza 5, folosim notatia: $2341_{(5)}$. De obicei, daca nu este indicata baza, consideram ca numarul este scris in baza 10. Putem deci scrie :

$$346 = 2341_{(5)}$$

ceea ce ne spune ca numarul 346 scris in baza 10 este egal cu numarul 2341 scris in baza 5.

Transformarea unui numar dintr-o baza oarecare in baza 10

Pentru a transforma un numar dintr-o baza oarecare in baza 10 vom proceda facand inmultiri.

Mai exact, vom descompune numarul considerat in baza corespunzatoare, asa cum am vazut mai sus, pentru numerele din baza 10. De aceasta data, insa, vom descompune numarul cu ajutorul puterilor numarului care ne indica baza.

Sa consideram numarul $2341_{(5)}$. Vom descompune acest numar cu ajutorul puterilor lui 5 si, numarul rezultat dupa efectuarea calculelor va fi numarul considerat scris insa in baza 10.

$$2341_{(5)} = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^0 = 250 + 75 + 20 + 1 = 346$$

Daca dorim sa trecem un numar dintr-o baza *i* intr-o baza *j*, putem face acest lucru prin intermediul bazei 10 : vom transforma din baza *I* in baza 10 si apoi in baza *j*.

o Operatii cu numere naturale: adunarea si scaderea – proprietati, inmultirea si impartirea - proprietati, teorema impartirii cu rest; puterea cu exponent natural a unui numar natural; patratul unui numar natural, reguli de calcul cu puteri

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

2.5. Operatii in *N*

Adunarea numerelor naturale

Numerele care se aduna se numesc termenii adunarii iar rezultatul adunarii se numeste suma.

Proprietati:

1. adunarea este comutativa: a+b=b+a, oricare ar fi numerele naturale a si b;
2. adunarea este asociativa: a+(b+c)=(a+b)+c, oricare ar fi numerele naturale a, b si c;
3. numarul natural 0 este element neutru la adunare: a+0=a, oricare ar fi numarul natural a.

Scaderea numerelor naturale

Scaderea este operatia inversa adunarii. Vorbim de scadere atunci cand se cunoaste suma a doua numere si unul dintre ele si dorim sa aflam celalalt numar.

In relatia

a-b=c,

a se numeste descazut, *b* – scazator, iar c=a-b se numeste diferenta numerelor a si b.

Inmultirea numerelor naturale

Inmultirea numerelor naturale se defineste ca o adunare repetata de termeni egali:

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots.. + b}_{\text{de a ori}}$$

Numerele *a* si *b* se numesc factorii inmultirii iar numarul $a \cdot b$ se numeste produsul numerelor *a* si *b*.

Daca unul dintre factori este 0, produsul este 0.

Proprietati:

1. asociativitate
2. comutativitate
3. numarul natural 1 este element neutru
4. inmultirea este distributiva fata de adunare

Impartirea numerelor naturale

Cunoscand produsul a doua numere naturale si unul dintre ele, dorim sa aflam celalalt numar.

Impartirea este operatia inversa a inmultirii si poate fi definita si ca o scadere repetata a aceluiasi termeni.

Catul impartirii $a:b$ este numarul care arata de cate ori este posibil sa scadem b din a, iar restul este primul descazut mai mic decat b in acest sir de scaderi.

Impartirea numerelor naturale nu este posibila decat daca b este nenul.

Teorema impartirii cu rest:

Oricare ar fi numerele naturale a si b, b – nenul, exista doua numere naturale q si r, numite cat, respectiv rest astfel incat:

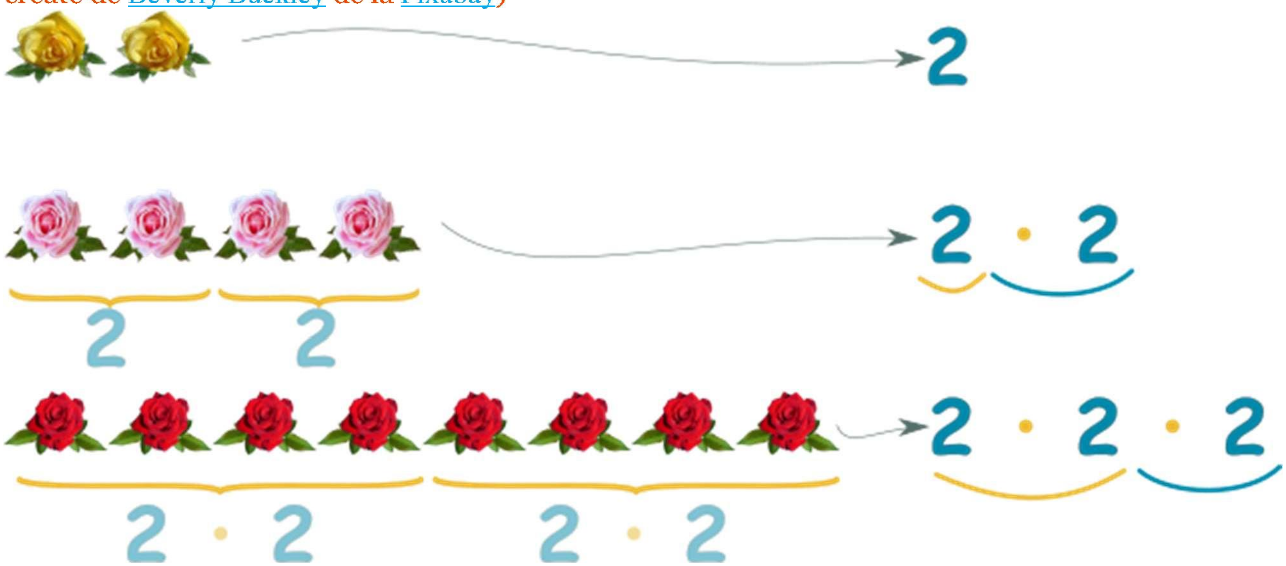
$$a = b \cdot q + r, r < b$$

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Ce înseamnă puterea unui număr natural?

Adela are o grădină foarte frumoasă în jurul casei. Printre alte flori, are și trandafiri: doi trandafiri galbeni, de două ori mai mulți trandafiri roz și trandafiri roșii de două ori mai mulți decât cei roz.

Câți trandafiri roșii are Adela în grădină? (am folosit imagini cu trandafiri create de Beverly Buckley de la Pixabay)



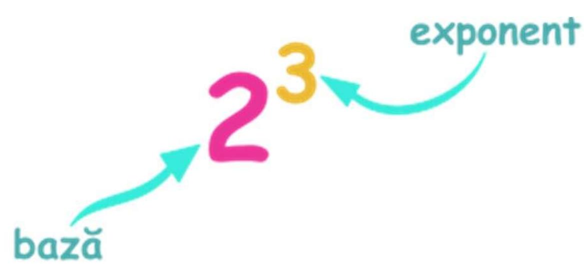
Obserăm că numărul trandafirilor se dublează; pornim de la cei 2 trandafiri galbeni, trandafirii roz sunt de două ori mai mulți decât cei galbeni, deci e vorba de operația de înmulțire. Astfel avem 2 înmulțit cu 2 trandafiri roz, iar numărul trandafirilor roșii este dublu față de numărul trandafirilor roz, adică 2 înmulțit cu 2 înmulțit cu 2. Problema s-ar fi complicat dacă Adela ar fi avut mai multe soiuri de trandafiri; dacă ar fi avut de exemplu, 20 de soiuri, numărul trandafirilor dintr-un soi fiind dublu față de numărul trandafirilor din soiul anterior? Pentru ultimul soi de trandafiri am fi avut 2 înmulțit cu 2, înmulțit cu 2... de 20 de ori. Pentru situații din acestea, când avem un număr înmulțit cu el însuși de mai multe ori, s-a inventat o nouă operație matematică, ridicarea la putere.

$$\underbrace{2}_{\text{o dată}} = 2^1$$

$$\underbrace{2 \cdot 2}_{\text{de 2 ori}} = 2^2$$

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 3 ori}} = 2^3$$

Pentru afla numărul trandafirilor roz l-am înmulțit pe 2 cu el însuși de două ori. Folosim notația 2^2 și spunem că l-am ridicat pe 2 la puterea a doua. Înseamnă că 2^2 este egal cu 2 înmulțit cu 2, adică este egal cu 4.
Pentru a afla numărul trandafirilor roșii, l-am înmulțit pe 2 cu el însuși de 3 ori. Folosim notația 2^3 și spunem că l-am ridicat pe 2 la puterea a treia. Înseamnă că 2^3 este egal cu 2 înmulțit cu 2 înmulțit cu 2, adică este egal cu 8. Deci Adela are 8 trandafiri roșii în grădină.



citim „2 la puterea a treia"

sau „2 la a treia"

Pentru înmulțirea repetată a unui număr cu el însuși de mai multe ori, se folosește ridicarea la putere. Oricum am alege două numere naturale a și b, a diferit de zero, notația a^b înseamnă a înmulțit cu el însuși de b ori și se citește „a ridicat la puterea b" sau „a la puterea b” sau „a la b”. Numărul a se numește baza, iar numărul b este exponentul puterii. Exponentul ne arată de câte ori se înmulțește baza cu ea însăși.

exponent

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } b \text{ ori}}, \quad \text{cu } a \neq 0$$

bază

citim „a la puterea b”

Exemple

1

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 4 ori}} = 2^4 = 16$

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 5 ori}} = 2^5 = 32$

$2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 6 ori}} = 64$

$2^7 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{de 7 ori}} = 128$

2

$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$
$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

3

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
$11^2 = 11 \cdot 11 = 121$
$13^2 = 13 \cdot 13 = 169$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

4 Calculăm:

$2^2 + 5^3 - 7^2 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \cdot 5 - 7 \cdot 7 = 4 + 125 - 49 = 80$
$2^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 9 + 16 \cdot 25 = 36 + 400 = 436$
$4^4 + 6^3 \cdot (10 - 3^2) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot (10 - 3 \cdot 3) = 256 + 216(10 - 9) = 256 + 216 = 472$

5 Comparăm:

$6^3 > 6 \cdot 3$
$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
$6 \cdot 3 = 18$
$216 > 18$

$10^2 > 10 \cdot 2$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10 \cdot 2 = 20$
$100 > 20$

$2 \cdot 2 = 2^2$
$2 \cdot 2 = 4$
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$4 = 4$

Ordonați crescător numerele: 7^3, 3^7, $7 \cdot 3$.

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 7 = 343$
$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 \cdot 27 = 2187$
$7 \cdot 3 = 21$
Numerele așezate în ordine crescătoare: $7 \cdot 3$, 7^3, 3^7.
$21 < 343 < 2187$, adică $7 \cdot 3 < 7^3 < 3^7$

Proprietăți

Ridicarea la putere este o operație de ordinul III. Ne amintim că adunarea și scăderea sunt operații de ordinul I, iar înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul II. Într-un exercițiu în care avem ridicări la putere, efectuăm această operație mai întâi, apoi operațiile de ordinul II în ordinea în care apar, iar la final operațiile de ordinul I, în ordinea în care apar. Dacă avem paranteze, efectuăm mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi pe cele din parantezele drepte, iar la final operațiile din acolade, ținând seama de ordinul acestor operații.

Sunt câteva convenții referitoare la ridicarea la putere:

- orice număr natural diferit de 0, ridicat la puterea 0 este egal cu 1;
- orice număr natural ridicat la puterea 1 este egal cu el însuși;
- numărul 1 ridicat la orice putere este tot 1;
- 0 ridicat la orice putere diferită de 0 este tot 0;
- 0 la puterea 0 nu se definește.

Să vedem aceste proprietăți însoțite de câteva exemple:

- ridicarea la putere este operație de ordinul III (se efectuează înaintea operațiilor de $\underbrace{\text{adunare, scădere}}_{\text{ordinul I}}$, $\underbrace{\text{înmulțire, împărțire}}_{\text{ordinul II}}$)

$$6^2 + 8^2 : 2 - 2^2 \cdot 7 = 6 \cdot 6 + 8 \cdot 8 : 2 - 2 \cdot 2 \cdot 7$$
$$= 36 + 64 : 2 - 4 \cdot 7$$
$$= 36 + 32 - 28$$
$$= 68 - 28$$
$$= 40$$

- $a^0 = 1$, dacă $a \neq 0$

$2019^0 = 1$

$8^0 = 1$

- $a^1 = a$

$2019^1 = 2019$

$173^1 = 173$

- $1^a = 1$

$1^{2019} = 1$

$1^{34} = 1$

- $0^a = 0$, dacă $a \neq 0$

$0^{2019} = 0$

$0^{722} = 0$

- 0^0 nu este definit

Încearcă și tu!

1

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{\square}$

$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = \square^{\square}$

$12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \square = 12^{\square}$

$\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 10^{\square} = \square$

$5 \cdot 5 \cdot 5 = \square^{\square} = \square$

Răspuns

2

$11^{\square} = 121$	$10^{\square} = 10\,000$
$2^{\square} = 8$	$9^{\square} = 9$
$2^{\square} = 16$	$12^{\square} = 144$
$2^{\square} = 32$	$10^{\square} = 1000$
$2^{\square} = 64$	$\square^{2} = 36$
$7^{\square} = 49$	$3^{\square} = 81$
$\square^{2} = 25$	$4^{\square} = 64$
$8^{\square} = 64$	$3^{\square} = 27$
$\square^{2} = 81$	$\square^{8} = 0$
$1^{\square} = 1$	

Răspuns

3 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$

$5^2 - 4^2 =$

$11^2 + 10^2 \cdot 3^2 =$

$0^{2019} + 56 : 2^3 - 1^{2019} =$

$5 + (3^2 + 2^4 \cdot 3) : 3 =$

o Divizibilitatea numerelor naturale, divizor, multiplu, criterii de divizibilitate cu: 2, 3, 4, 5, 9, 10; numere prime, numere compuse; descompunerea unui numar natural in factori primi, aflarea c.m.m.d.c., c.m.m.m.c. a doua sau mai multe numere natural

DIVIZIBILITATE IN *N*

Numere prime.

Prim este numarul care se divide numai cu el însusi si cu 1. Numarul 1, având numai un divizor nu face parte din numerele prime.

Putem recunoaste daca un numar n este prim încercând ca divizori numerele prime inferioare primului numar prim p al carui patrat este mai mare decât numarul dat n ($p^2 > n$).

Exemplu.

Pentru a stabili ca 167 este numar prim, având $13^2 \cong 167$, va fi suficient sa verificam ca el se divide cu numerele 2, 3, 5, 7, 11.

Teoremã. **(***Teorema fundamentală a aritmeticii***)**

Orice număr natural se scrie în mod unic ca produs de numere prime**.**

Teoremã. Există o infinitate de numere prime.

Teorema împãrtirii cu rest

Oricare ar fi numerele $a, b \in N$, ($b \neq 0$), există şi sunt unice două numere naturale q şi r astfel încât

$$a=bq+r \text{ şi } r<n.$$

Definitii

Fie a si b doua numere naturale, b – nenul. Spunem ca a se divide cu b (sau b divide pe a) daca exista un numar natural c astfel incat $a = b \cdot c$.

a se numeste multiplu al lui b, iar b se numeste divizor al lui a.

Proprietati

1. daca un numar natural a se divide cu numarul natural b, atunci a se divide cu toti divizorii lui b
2. daca fiecare termen al unei sume (sau diferente) se divide cu un numar, atunci suma (sau diferenta) se divide cu acel numar
3. daca fiecare termen al unei sume (sau diferente) cu exceptia unuia se divid cu un numar, atunci suma (sau diferenta) nu se divide cu acel numar
4. daca un numar natural a se divide cu un numar natural m, atunci produsul lui a cu orice numar natural se divide cu m.
5. daca un numar natural a se scrie ca un produs de doua numere naturale, $a = x \cdot y$, atunci orice divizor al lui a se poate scrie ca produs de forma $x_1 \cdot y_1$, unde x_1, y_1 sunt divizori ai lui x, respectiv y. Si reciproca este valabila, adica daca $a = x \cdot y$, atunci orice produs de forma $x_1 \cdot y_1$, unde x_1, y_1 sunt divizori ai lui x, respectiv y este divizor al lui a.

Criterii de divizibilitate

Definiţie.

O regula pe baza careia putem spune ca a este divizibil cu b fara a face împartirea se numeste *criteriu de divizibilitate*.

Teoremã. (*Criteriul de divizibilitate cu* 2^k *şi cu* 5^k)

Un număr natural m este divizibil cu 2^k (sau cu 5^k) dacă şi numai dacă numărul format de ultimele k cifre din scrierea sa în baza zece este divizibil cu2^k (sau cu 5^k)

Exemple.

- numerele 3724 si 18760 sunt divizibile cu 2^2 (pentru ca 24 si 60 sunt multiplii de 4).
- numerele 6900; 4925; 3250; 1475; 5000 sunt divizibile cu 25 (5^2).

Teoremã. (*Criteriul de divizibilitate cu 3 şi cu 9*)

Un număr natural m este divizibil cu 3 (respectiv cu 9) dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9).

Teoremã. (*Criteriul de divizibilitate cu 11*)

Un număr natural n este divizibil cu 11 dacă şi numai dacă diferenţa dintre sumele alternante ale cifrelor sale este divizibilă cu 11.

Exemplu. Numarul 18326 este divizibil cu 11 deoarece suma alternanta a cifrelor sale este 1-8+3-2+6=0, divizibila cu 11 .

In forma lor cea mai folosita, criteriile pot fi exprimate mai simplu astfel :

- un numar este divizibil cu 2 sau cu 5 daca numarul format de cifra unitatiolr acelui numar este divizibila cu 2 sau cu 5;
- un numar este divizibil cu 4 sau cu 25 daca numarul format din ultimele doua cifre este divizibil cu 4 sau cu 25;
- un numar este divizibil cu 8 sau cu 125 daca numarul format din ultimele trei cifre este divizibil cu 8 sau cu 125;
- un numar se divide cu 3 sau cu 9 daca suma cifrelor sale se divide cu 3 sau cu 9.

Descompunerea în factori primi a unui număr

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Știm din **teorema fundamentală a aritmeticii** că orice numar natural nenul poate fi scris ca un produs de numere naturale prime. Scrierea acestuia ca un produs de numere prime se numește **descompunere în factori primi.**

De exemplu, numărul 126 poate fi scris ca $2\cdot3_2\cdot7$.

Poate v-ați întrebat de ce 1 nu se consideră a fi număr prim. Fiindcă dacă acesta ar fi prim, ar fi existat două reprezentări diferite a unui număr ceea ce nu respectă enunțul teoremei de mai sus.

De exemplu pentru numărul 15 ar fi fost considerate corecte următoarele descompuneri:

$15=1\cdot5\cdot3$

$15=1\cdot5\cdot3$

etc.

Acestea nu respectă teorema de mai sus fiindcă există doar o singură reprezentare corectă: $15=5\cdot3$

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$126 = 2 * 3^2 * 7$

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c). Legătura dintre c.m.m.d.c și c.m.m.m.c.

Un număr natural ***m*** se numește ***MULTIPLU COMUN*** pentru numerele naturale ***a*** și ***b,*** dacă ***m*** este divizibil cu ***a*** și ***m*** este divizibil cu ***b***. Ex. 24 este multiplu comun pentru 6 și 8 , deoarece 24 este divizibil cu 6 și 24 este divizibil cu 8.

DEF*– *Cel mai mic multiplu comun (C.M.M.M.C) a mai multor numere naturale nenule este cel mai mic număr natural diferit de zero, care este divizibil cu fiecare număr dat.

NOTAȚIE **c.m.m.m.c pentru a și b= [a;b]**

METODĂ de calcul (c.m.m.m.c pentru 2 sau mai multe numere naturale):

–**se descompun** numerele în produs de factori primi;

-se face ***PRODUSUL FACTORILOR COMUNI ȘI NECOMUNI*** luați o singură dată la ***PUTEREA cea mai MARE*.**

EXERCIȚII propuse:

1)Aflați c.m.m.m.c pentru 12, 20 și 75.

2)Aflați [S1;S2] pentru S1=1+2+…+20 si S2=1+2+…+24.

REZOLVARE:

Exercițiul 1) Aflați c.m.m.m.c pentru 12, 20 și 75.

R: $[12; 20; 75] = ?$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2\cdot 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12 = 2^2\cdot 3 \\ 20 = 2^2\cdot 5 \\ 75 = 3\cdot 5^2 \end{array}$$

$$[12; 20; 75] = 2^2\cdot 3\cdot 5^2 = 4\cdot 3\cdot 25 = 100\cdot 3 = 300.$$

Exercițiul 2) Aflați $[S_1; S_2]$ dacă:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = 1+2+3+\dots+20 \\ S_2 = 1+2+3+\dots+24 \end{array}\right| \quad \boxed{1+2+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

R: $S_1 = \frac{20\cdot(20+1)}{2} = \frac{20\cdot 21}{2} = \frac{420}{2} = 420 : 2 = 210$

$S_2 = \frac{24\cdot(24+1)}{2} = \frac{24\cdot 25}{2} = \frac{600}{2} = 300$

$[S_1; S_2] = [210; 300].$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2\cdot 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2\cdot 5 \\ 30 & 2\cdot 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \\ 300 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2 \end{array}$$

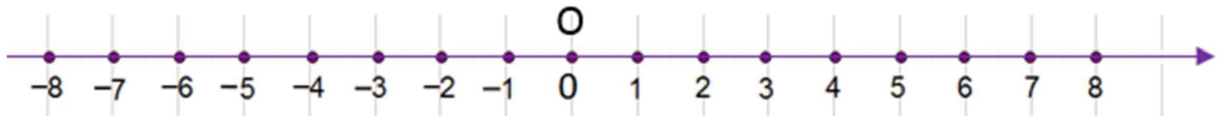
$[210; 300] = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow [210; 300] = 4\cdot 3\cdot 25\cdot 7 = 12\cdot 25\cdot 7 = 2100.$

Numere intregi
o Compararea numerelor intregi

Compararea și ordonarea numerelor intregi

Pe o dreaptă fixăm un punct O numit origine, o unitate de măsură și un sens pozitiv indicat de săgeată. Punctului O îi corespunde numărul zero. Obținem astfel o *axă a numerelor*, pe care vom reprezenta câteva numere întregi. Nu le putem reprezenta pe toate, pentru că mulțimea numerelor întregi este *infinită.*



Axa numerelor întregi

Sensul de creștere este cel indicat de săgeată. Astfel, numerele întregi care sunt situate la dreapta, sunt mai mari decât cele situate la stânga.

Exemple:

+3>-5+3>−5

-4>-7−4>−7

+7>+2+7>+2

Numere intregi – Opusul unui număr întreg

Numerele întregi care sunt situate la aceeași distanță față de origine se numesc **numere întregi opuse**. De exemplu, 4 și -4 sunt numere opuse, pentru că ambele sunt situate la o distanță de 4 unități față de zero. Vom spune că numărul 4 (sau +4) este opusul lui -4, iar -4 este opusul lui 4. Alte exemple de numere întregi opuse: -15 și +15; 9 și -9.

Numere intregi – Modulul unui numar intreg

Distanța de la poziția unui punct pe axă până la originea axei, se numește **modul** sau **valoare absolută**. Modulul unui număr întreg x se notează astfel: $|x|$.

Exemple:

|-3|=3|−3|=3

|+18|=18|+18|=18

|0|=0|0|=0

|16|=16|16|=16

De reținut! Modulul unui număr întreg este întotdeauna mai mare sau egal cu zero.

Prin urmare, modulul unui număr întreg pozitiv *x* este chiar *x*. Iar modulul unui număr întreg negativ –*x* este egal cu opusul său. Așadar, dacă x > 0 atunci:

$|+x|=x|+x|=x$
$|-x|=-(-x)=+x=x|-x|=-(-x)=+x=x$
Numerele întregi opuse sunt egale în modul, dar au semne contrare.

Exemple:

$|4|=|-4|=4|4|=|-4|=4$
$|-7|=|+7|=7|-7|=|+7|=7$
Pentru a compara două numere întregi, putem ține cont și de următoarele aspecte:

- dintre două numere întregi pozitive, este mai mare cel cu modulul mai mare (numerele întregi pozitive corespund numerelor naturale); *ex:* +12>+11;
- dintre două numere întregi negative, este mai mare cel cu modulul mai mic (*ex:* -5>-7 pentru că |-5|=5, |-7|=7, 5<7;
- orice număr pozitiv este mai mare decât orice număr negativ (*ex:* 6>-12);
- 0 este mai mare decât orice număr întreg negativ și mai mic decât orice număr întreg pozitiv (*ex:* -3<0<2).

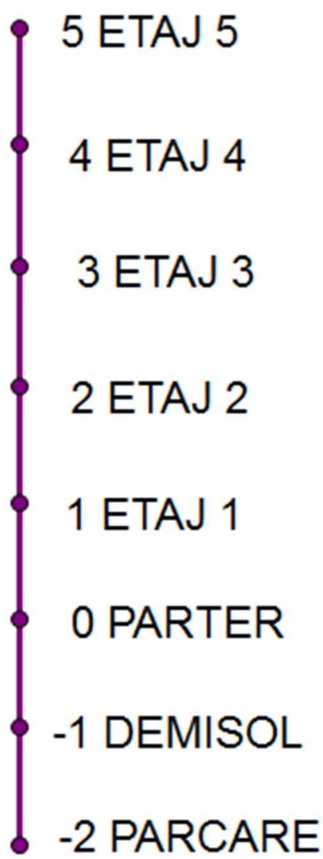
Exerciții rezolvate cu numere intregi

Exercițiul 1:

Un centru comercial are 8 nivele: parter, 5 etaje, un demisol și o parcare subterană. O persoană aflată la etajul 4 coboară 6 nivele. La ce nivel a ajuns?

Rezolvare:

Reprezentăm cele 8 nivele pe o "axă" verticală. O persoană aflată la etajul 4, care coboară 6 nivele, va ajunge la parcarea subterană.



Exercițiul 2:

Calculați:

a) $|-12|+|-3|-|+6|$;

b) $|-32|-|+25|+|0|-|4|$;

Rezolvare:

a) $|-12|+|-3|-|+6|=12+3-6=9$;

b) $|-32|-|+25|+|0|-|4|=32-25+0-4=3$.

Exercițiul 3:

Aflați numerele întregi x cu proprietatea că $|x|=100$.

Rezolvare:

Numerele întregi care au modulul egal cu 100 sunt: -100 și 100 (două numere întregi opuse au același modul). Prin urmare $x \in \{-100,100\}$.

Exercițiul 4:

Adunați opusul lui -15 cu opusul lui -23.

Rezolvare:

opusul lui -15 este +15 (sau 15), iar opusul lui -23 este +23 (sau 23). Așadar vom aduna 15+23=38.

Observație: putem efectua această adunare, chiar dacă nu am învățat încă să adunăm numerele întregi, pentru că numerele întregi pozitive sunt numere naturale, iar adunarea acestora se face după regulile învățate la adunarea numerelor naturale.

Exercițiul 5:

Scrieți în ordine crescătoare următoarele numere:

-23, +18, -15, 0, -9, +20, 14, -6.

Rezolvare:

Ordinea crescătoare este:

-23, -15, -9, -6, 0, 14, +18, +20.

Exercițiul 6:

Într-o săptămână din luna Decembrie s-au înregistrat următoarele temperaturi:

Luni:	-8°C
Marți:	-5°C
Miercuri:	-7°C
Joi:	-9°C
Vineri:	0°C
Sâmbătă:	2°C
Duminică: +1°C.	

Răspundeți la următoarele întrebări:

a) În ce zi a fost cel mai frig? Dar cel mai cald?

b) În ce zile s-au înregistrat temperaturi negative?

c) În ce zile temperatura a fost mai mare de -3°C?

d) În ce zile temperatura a fost mai mică de -6°C?

Rezolvare:

a) Cea mai mică temperatură a fost joi, -9°C, prin urmare joi a fost cel mai frig. Cea mai mare temperatură a fost sâmbătă 2°C. Cel mai cald a fost sâmbătă.

b) Temperaturi negative s-au înregistrat luni, marți, miercuri, joi.

c) Temperatura a fost mai mare de -3°C vineri, sâmbătă și duminică.

d) Temperatura a fost mai mică de -6°C luni, miercuri și joi.

o Operatii cu numere intregi: adunarea, scaderea, inmultirea, impartirea

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Multimea numerelor intregi

Definitie

Numim ***multimea numerelor intregi,*** multimea $Z = (-N) \cup N$, unde $-N = \{-n | n \in N\}$.

Astfel:

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-n,\ldots,-1,0,+1,+2,+3,\ldots,+n,\ldots\}$$

Teoremă. (Împărţirea numerelor întregi).

Oricare ar fi $a,b \in Z$,$b\neq0$, există $q,r \in Z$ astfel încât $a = bq + r$ şi $0 \leq r < |b|$

Observatie: $|b|$ este modulul lui b, notiune despre care vom discuta intr-un capitol ulterior.

Ca definitie, avem : $|x| = \begin{cases} x, daca\ x \geq 0 \\ -x, daca\ x < 0 \end{cases}$.

Divizibilitate pe Z.

Definiţie.

Daca $a,b \in Z$, b≠0, spunem ca *a divide b* (scriem $a|b$) daca exista $c \in Z$ astfel încât $b=ac$.

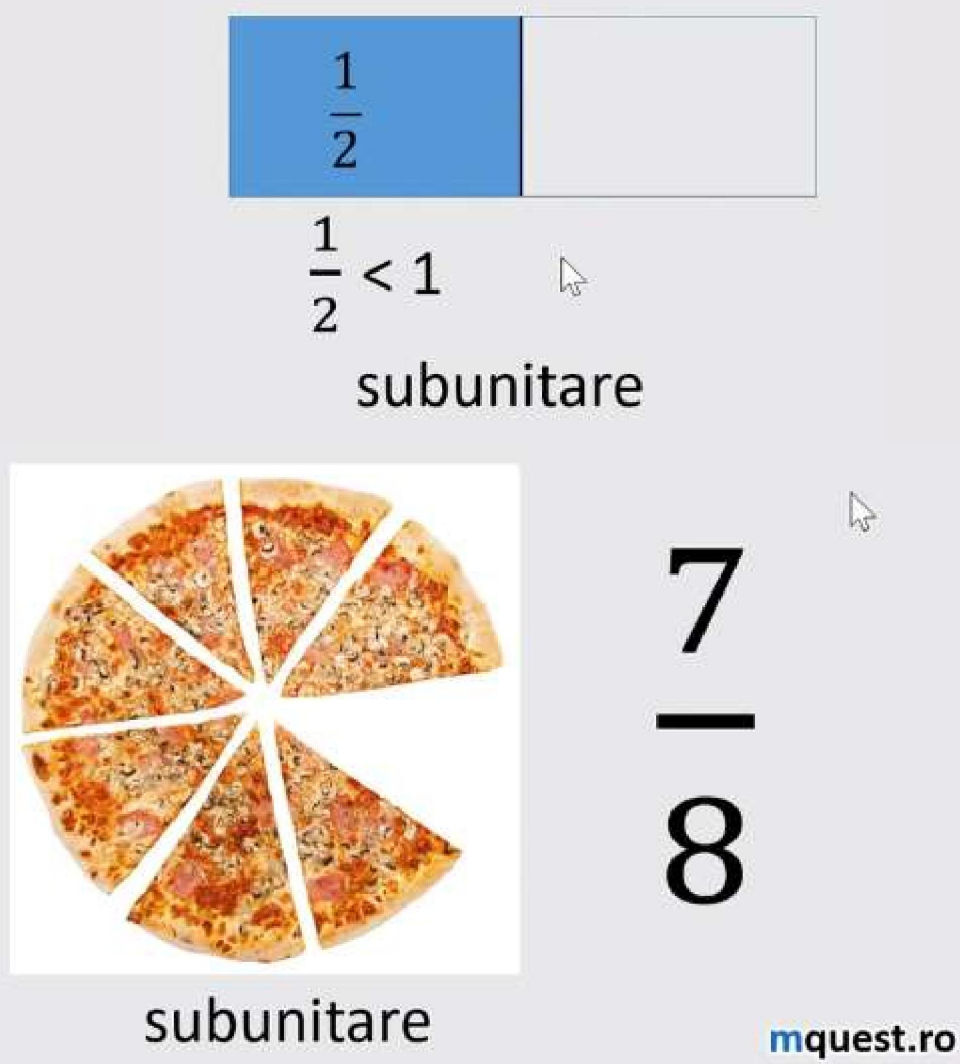
Observaţie. Ca si în cazul lui **N** nu vom defini, nici în cazul lui **Z** divizibilitatea prin 0.

Numerele prime din **Z** se definesc ca fiind acele numere întregi *p* cu proprietatea ca *p*≠-1,0,1 iar singurii divizori ai lui *p* sunt –1, 1, *p*, -*p*.

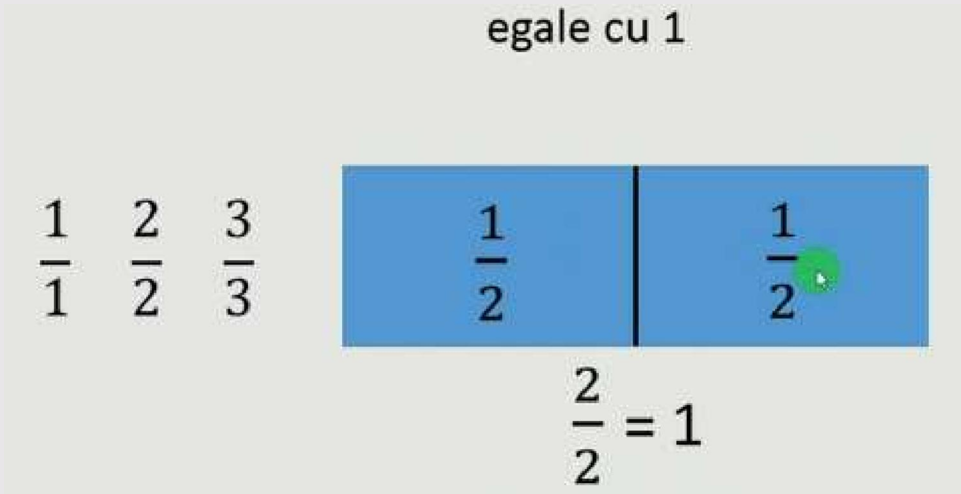
Deducem ca numerele prime din **Z** sunt numerele de forma -*p,* +*p*, cu *p* numar prim în ***N***.

FRACTII SUBUNITARE, ECHIUNITARE, SUPRAUNITARE

Aproape toate lucrurile din lume se pot aseza in categorii. Iata, baietii pot fi blonzi sau bruneti, merele pot fi verzi sau rosii. Asa si fractiile pot fi mai mici decat 1, egale cu 1 sau mai mari decat 1. Iata in aceasta lectie vom aseza fractiile in trei categorii: fractiile mai mici decat 1 sunt denumite subunitare, pentru ca sunt sub limitata de 1. De exemplu avem un intreg, dar luam doar jumatate din el, jumatatea este mai mica decat intregul. Aceasta fractie se numeste fractie subunitara. Sau daca luam o pizza, o taiem in opt felii si luam doar sapte felii din aceasta pizza. Aceasta fractie este mai mica decat 1 pentru ca nu mancam toata pizza. Deci 7/8 face parte din categoria fractiilor subunitare.



Pe fractiile egale cu 1 le numim fractii echiunitare, echi vine de la echivalent, de la egal, inseamna fractii egale cu unitatea. Daca avem un intreg si il impartim in doua si luam ambele jumatati, atunci formam o fractie echiunitara. Fractiile echiunitare se formeaza atunci cand luam un intreg, il impartim in parti egale si luam toate partile sau luam o pizza, o impartim in opt felii si mancam toate feliile, adica mancam intreaga pizza. Tinem minte, acestea se numesc fractii echiunitare.



Fractiile mai mari decat 1 se numesc fractii supraunitare. Supra vine de la mai mare, fractii mai mari decat 1. Este ca si cand am lua un intreg, l-am imparti in jumatate de exemplu, dar nu ne-ar ajunge cele doua jumatati si am mai chema una. Avem acum 3 jumatati, fractia este 3/2 si este mai mare decat 1. Sau taiem o pizza in opt felii, dar nu ne ajung aceste opt felii si mai cerem doua. Fractia formata este 10/8, o fractie supraunitara, prin urmare aceste fractii se numesc supraunitare.

Sa vedem cum notam in expresii matematice acest lucru. Fractiile subunitare se noteaza cu a supra b, unde a si b sunt doua numere si a mai mic decat b, evident b nu poate fi 0. Fractiile echiunitare se noteaza cu a supra b, unde a este egal cu b si b niciodata nu poate fi 0 la numitor. Fractiile supraunitare se noteaza cu a supra b, unde a este mai mare decat b si b diferit de 0.

subunitare	$\frac{a}{b}$,	$a < b$; $b \neq 0$
echiunitare	$\frac{a}{b}$,	$a = b$; $b \neq 0$
supraunitare	$\frac{a}{b}$,	$a > b$; $b \neq 0$

procente;

Procentele sunt fracții cu numitorul 100. Un raport de forma *p/100* se numește **raport procentual** și se citește "*p la sută*" sau "*p procente*" .

Aflarea unui procent dintr-un număr

Pentru a calcula *p*% dintr-un număr, înmulțim fracția *p*/100 cu numărul dat.

$$p\%\ din\ n\ este\ \frac{p}{100}\cdot n.$$

Alte probleme rezolvate cu procente

Problema 1:

O bicicletă costă 700 lei și se scumpește cu 20%. Care este noul preț?

Rezolvare:

Aflăm cu cât se scumpește.
20% din 700 lei este:

$$\frac{20}{100}\cdot 700 = 20\cdot 7 = 140\ lei$$

Aflăm prețul după mărire:

700+140=840 lei.

Problema 2:

La un concurs au participat 8 elevi dintr-o clasă, adică 25% din numărul total de elevi. Câți elevi sunt în clasă?

Rezolvare:

Notăm cu x numărul total de elevi din clasă.
25% din x reprezintă 8 elevi

$$\frac{25}{100}\cdot x = 8 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot x = 8 \Rightarrow \frac{x}{4} = 8 \Rightarrow x = 4\cdot 8 \Rightarrow x = 32\,elevi.$$

Problema 3:

Dintr-o clasă de 24 de elevi, 18 au fost în excursie la Brașov. Cât la sută din elevi au fost în excursie?

Rezolvare:

Trebuie să aflăm cât la sută din 24 reprezintă 18.

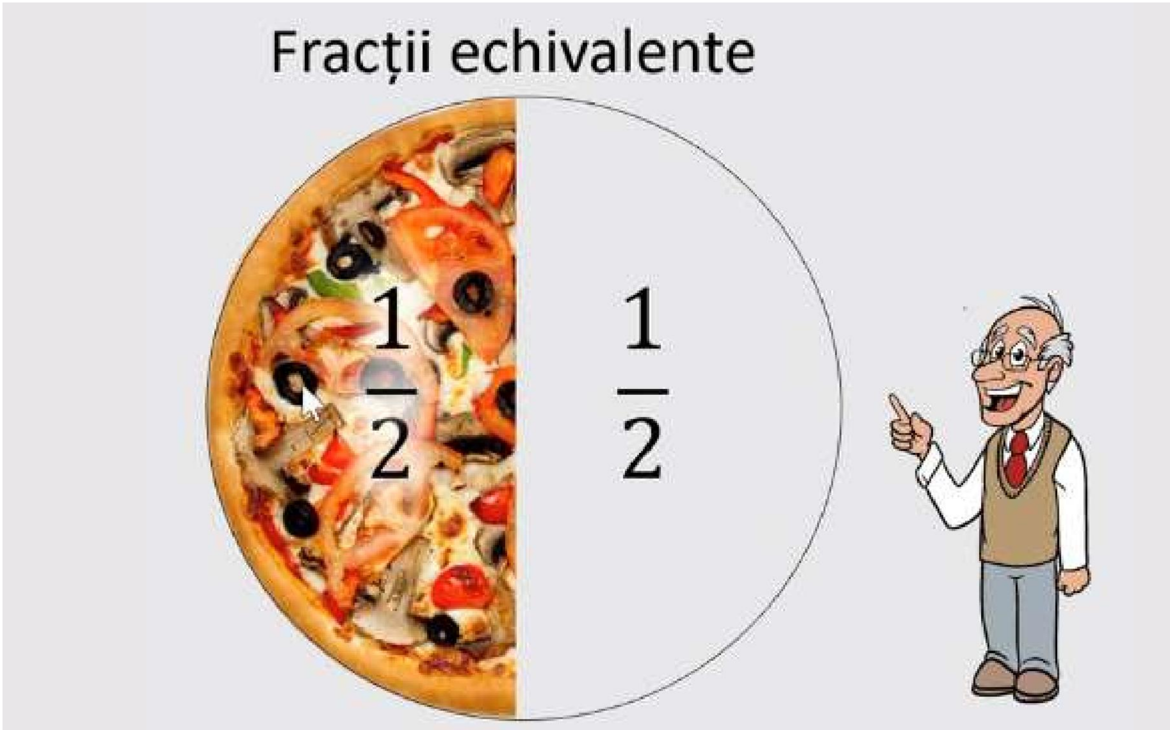
$$\frac{x}{100}\cdot 24 = 18 \Rightarrow \frac{24x}{100} = 18 \Rightarrow 24x = 1800 \Rightarrow x = 1800:24 \Rightarrow x = 75.$$

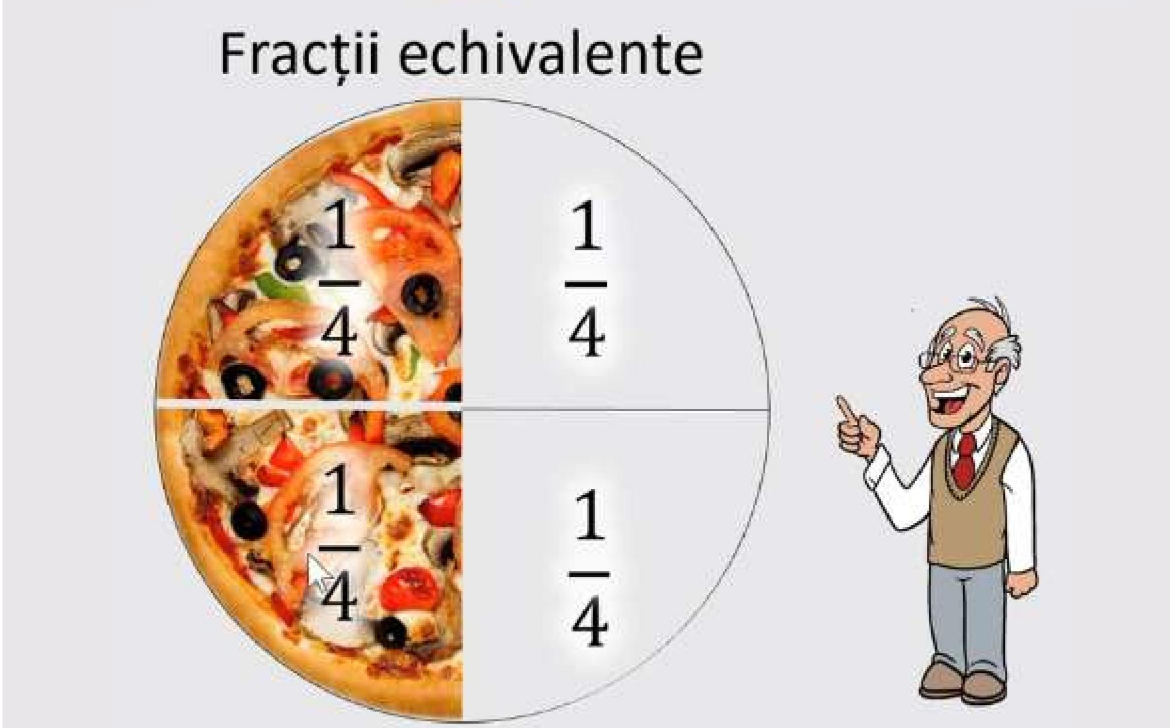
Așadar 75% din elevi au fost în excursie.

fractii echivalente Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

FRACTII ECHIVALENTE

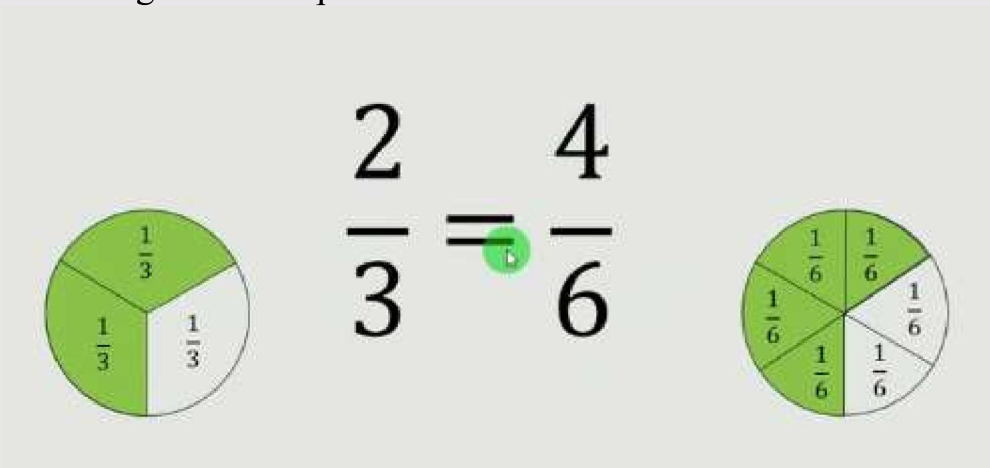
Nu stiu voua, dar mie iar mi s-a facut pofta de pizza. Am o pizza si o impart in doua parti egale. Avem doua jumatati si manan una din ele. A doua zi am acelasi fel de pizza, dar o impart in patru parti egale, in sferturi si mananc doua dintre ele. Observati ca ieri am mancat jumatate, azi am mancat doua sferturi. Dar jumatate este acelasi lucru cu doua sferturi. Deci 1/2 este egal cu 2/4. Scriem asa: 1/2 egal 2/4, aici avem o jumatate, aici avem doua sferturi. Aceste fractii care semnifica aceeasi parte dintr-un intreg, aceeasi cantitate, se numesc fractii echivalente. Ele pot avea forme diferite, dar valoarea este aceeasi.



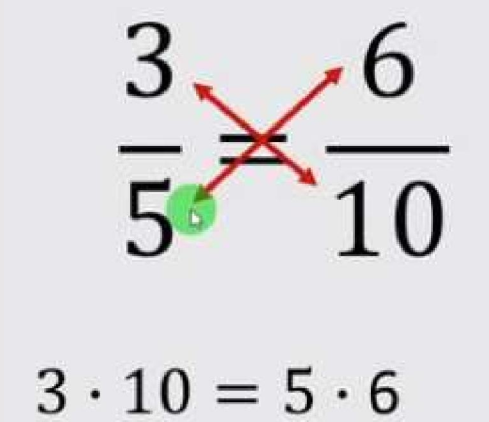


Asta inseamna ca fractiile sunt echivalente, cand luam aceeasi parte din intreg, dar totusi fractiile arata diferit. Din cauza asta nu spunem ca sunt egale, le denumim echivalente.

Sa vedem alt exemplu. Pentru prima fractie luam un intreg, il impartim in trei, ca avem 3 la numitor si luam doua parti, pentru ca avem 2 la numarator. Pentru a doua fractie luam un cerc, il impartim in sase parti egale, pentru ca avem sase la numitor si luam patru parti, pentru ca avem patru la numarator. Observati ca aceste fractii sunt echivalente, pentru ca reprezinta aceeasi cantitate si in stanga si in dreapta.



Alt exemplu similar este urmatorul: 3/5 este egal cu 6/10. De ce zic ca este similar, pentru ca avem aici trei cincimi si daca impartim la 2 fiecare cincime obtinem zecimi, dar trebuie sa luam de doua ori mai multe, adica 6. Eee, din pacate lucrurile nu sunt asa de evidente intotdeauna. Se intampla sa avem fractii cu numere ciudate, mari, pe care nu putem sa le evaluam asa bine. O sa va dau un pont, care va ajuta sa determinati daca doua fractii sunt echivalente. Observam un lucru interesant: daca inmultim pe diagonala numerele, adica 3 ori 10 si 5 ori 6, avem acelasi rezultat, 30.



Acesta este de fapt criteriul dupa care putem spune daca fractiile sunt echivalente: inmultim numerele pe diagonala. Cred ca v-am starnit deja curiozitatea sa stiti ce este in spatele acestui mecanism, de ce se intampla acest lucru. Tare mult as vrea sa va spun si promit ca in lectiile urmatoare o sa aflati misterul. Aceasta este o regula care functioneaza tot timpul, este universala. In loc de numerele acestea putem pune orice numere, atata timp cat nu avem la numitor 0. Putem pune a, b, c sau d. a supra b egal cu c supra d, daca inmultirea numerelor pe diagonala are acelasi rezultat. a ori d este egal cu b ori c.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Pe de alta parte, daca inmultirea aceasta nu are acelasi rezultat, atunci spunem ca fractiile nu sunt echivalente.
Sa luam un exemplu: 3/7 si 9/21. Sunt aceste fractii echivalente? Sa vedem! 3 ori 21 si 7 ori 9, le inmultim pe diagonale: 3 ori 21 este 63, 7 ori 9 este 63, prin urmare fractiile sunt echivalente.

$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}$$

$$63 = 63$$

Alt exemplu ar fi 3/5 si 5/7. Sunt aceste fractii echivalente? Sa vedem! Inmultim pe diagonala, pe 3 ori 7 il comparam cu 5 ori 5. Rezultatul: 3 ori 7 este 21, 5 ori 5 este 25. Aproape, dar nu exact. Nu sunt egale, fractiile nu sunt echivalente.

$$\frac{3}{5} \neq \frac{5}{7}$$

$$21 \neq 25$$

Adunarea și scăderea numerelor raționale

1. Adunarea și scăderea fracțiilor cu același numitor

Pentru a efectua adunarea (scăderea) fracțiilor cu același numitor, se adună (scad) numărătorii și se copiază numitorul comun (vezi exemplu mai jos).

2.Adunarea și scăderea fracțiilor cu numitori diferiți

Pentru a efectua adunarea (scăderea) fracțiilor cu numitori diferiți, trebuie mai întâi să aducem fracțiile la același numitor. Numitorul comun va fi cel mai mic multiplu comun al numitorilor. *Cel mai mic multiplu comun* a două numere *a* și *b* este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care se divide cu numerele *a* și *b*.

Algoritmul de aflare a celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.):

- descompunem numitorii în factori primi
- înmulțim toți factorii (comuni și necomuni) la puterea cea mai mare.
    - Și acum să rezolvăm câteva exerciții cu **numere raționale pozitive**, scrise sub formă de fracții ordinare:

Exerciții rezolvate cu numere raționale pozitive (scrise ca fracții ordinare):

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA FRACȚIILOR

$$\frac{3}{7}+\frac{8}{7}=\frac{3+8}{7}=\frac{11}{7}$$

$$\frac{1}{10}+{}^{5)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{1}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{1+5-4}{10}=\frac{2}{10}^{(2}=\frac{1}{5}$$

$$^{36)}\frac{3}{10}+{}^{20)}\frac{5}{18}-{}^{15)}\frac{1}{24}=\frac{108}{360}+\frac{100}{360}-\frac{15}{360}=\frac{108+100-15}{360}=\frac{193}{360}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{10 = 2 \cdot 5}$ $\boxed{18 = 2 \cdot 3^2}$ $\boxed{24 = 2^3 \cdot 3}$

Aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor:

$$[10,18,24] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Numitorul comun = 360

360 : 10 = 36 (amplificăm prima fracție cu 36)

360 : 18 = 20 (amplificăm a doua fracție cu 20)

360 : 24 = 15 (amplificăm a treia fracție cu 15).

- În cazul în care avem **numere raționale pozitive și negative,** operațiile cu acestea se reduc la operațiile cu numere întregi.

Exerciții rezolvate cu numere raționale pozitive și negative (scrise ca fracții ordinare):

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA FRACȚIILOR

$$-\frac{8}{5}+\frac{2}{5}=\frac{-8+2}{5}=\frac{-6}{5}=-\frac{6}{5}$$

$$\left(-{}^{3)}\frac{5}{6}\right)+\left(-{}^{6)}\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{18}\right)=-\frac{15}{18}-\frac{12}{18}+\frac{1}{18}=\frac{-15-12+1}{18}=-\frac{26^{(2}}{18}=-\frac{13}{9}$$

$$\left(-\frac{2}{45}\right)+\left(-{}^{9)}\frac{3}{5}\right)-\left(-{}^{5)}\frac{7}{9}\right)-\left(+{}^{15)}\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{45}-\frac{27}{45}+\frac{35}{45}-\frac{75}{45}=$$

$$=\frac{-2-27+35-75}{45}=-\frac{69^{(3}}{45}=-\frac{23}{15}$$

Operații cu numere raționale

- În **lecțiile video** prezentate mai jos găsiți exerciții rezolvate cu numere raționale reprezentate prin fracții ordinare, fracții zecimale, fracții periodice (adunarea și scăderea fracțiilor, înmulțirea fracțiilor și împărțirea fracțiilor). La final v-am pregătit și un **test online** pentru verificarea cunoștințelor.

Adunarea și scăderea fracțiilor

- Pentru a efectua operația de adunare (sau scadere) a fracțiilor ordinare cu același numitor, se adună (scad) numărătorii, iar numitorul comun se copiază.
- Pentru a efectua operația de adunare (sau scadere) a fracțiilor ordinare cu numitori diferiți, vom aduce fracțiile la același numitor. Dacă numitorul comun nu se poate

observa imediat, vom aplica algoritmul pentru calcularea celui mai mic multiplu comun al numitorilor (aici găsești lecția c.m.m.m.c.)

Înmulțirea și împărțirea fracțiilor

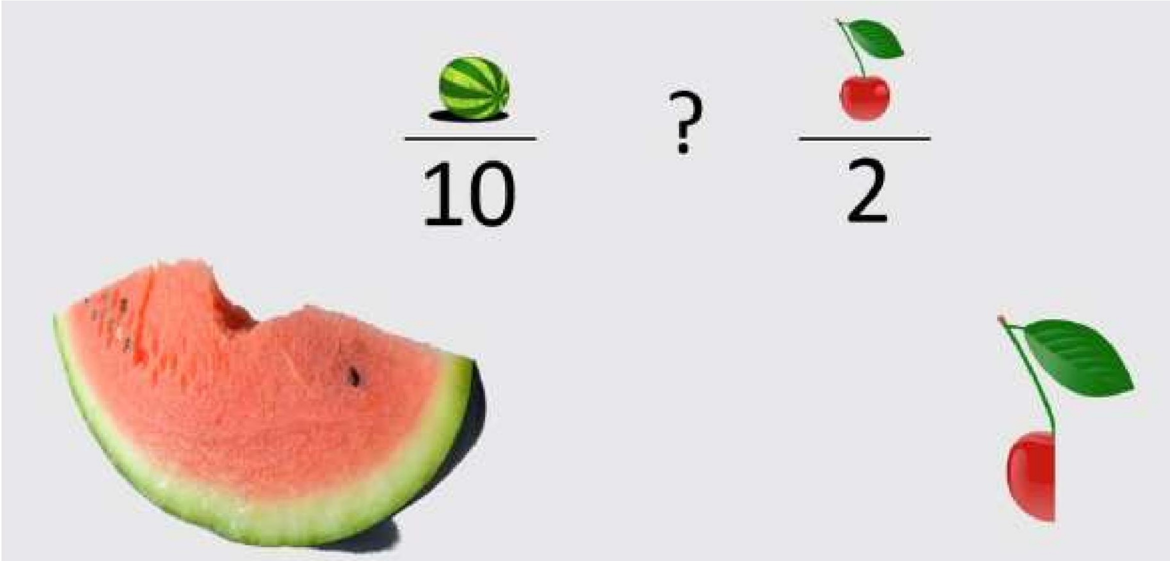
- Pentru a efectua operatia de înmulțire a fracțiilor ordinare, vom înmulți numărătorii, respectiv numitorii.
- Pentru a efectua operația de împărțire a fracțiilor ordinare, vom înmulți prima fracție cu inversa celei de-a doua fracții.
- Dacă avem un exercițiu care conține mai multe tipuri de operații, vom efectua mai întâi calculele din paranteze (dacă există), apoi ridicarea la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, iar la final adunările și scăderile.
- Vă invit să urmăriți **lecțiile video** de mai jos în care am prezentat operațiile cu numere raționale.

- o Compararea fractiilor.

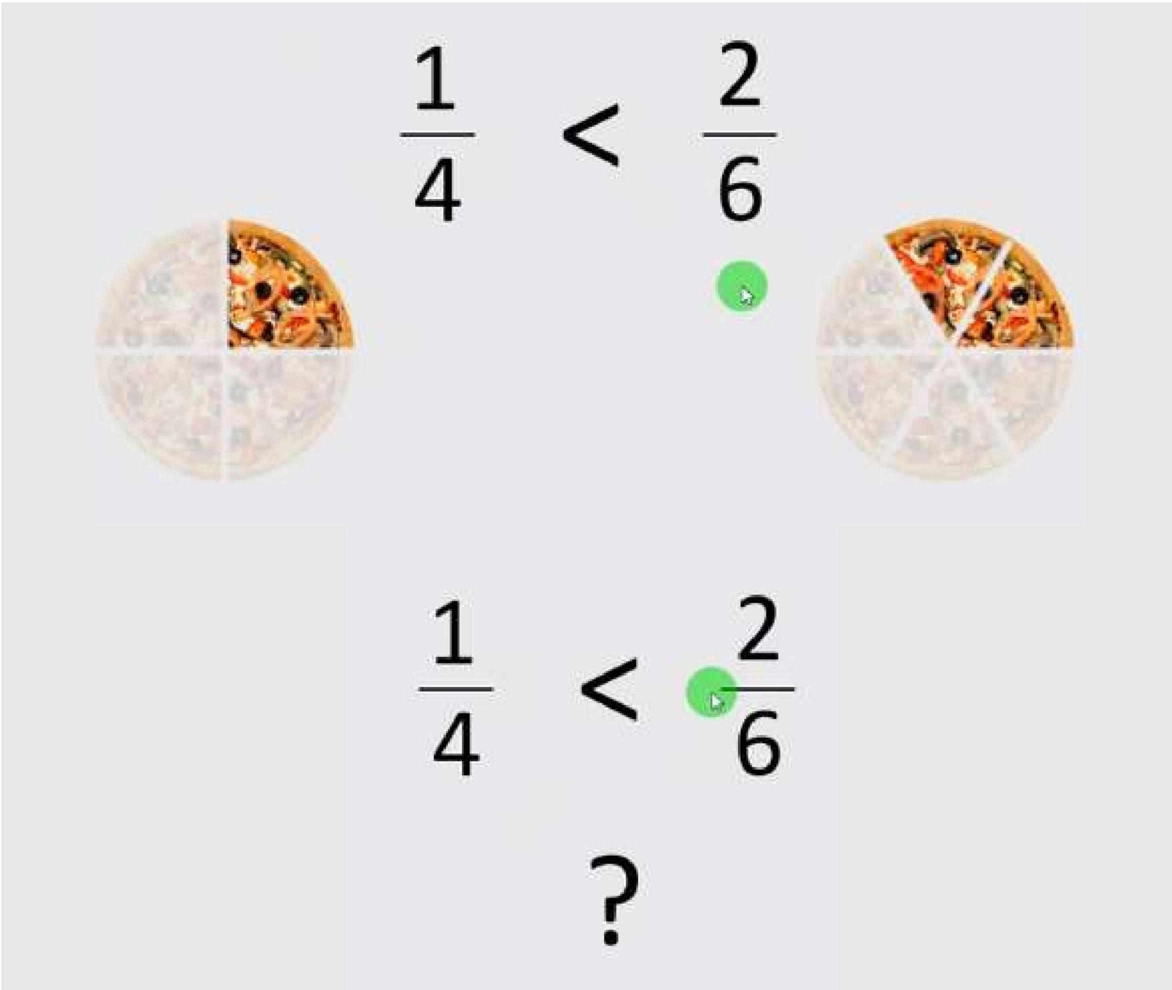
Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

COMPARAREA FRACTIILOR CU ACELASI NUMITOR SI NUMARATOR

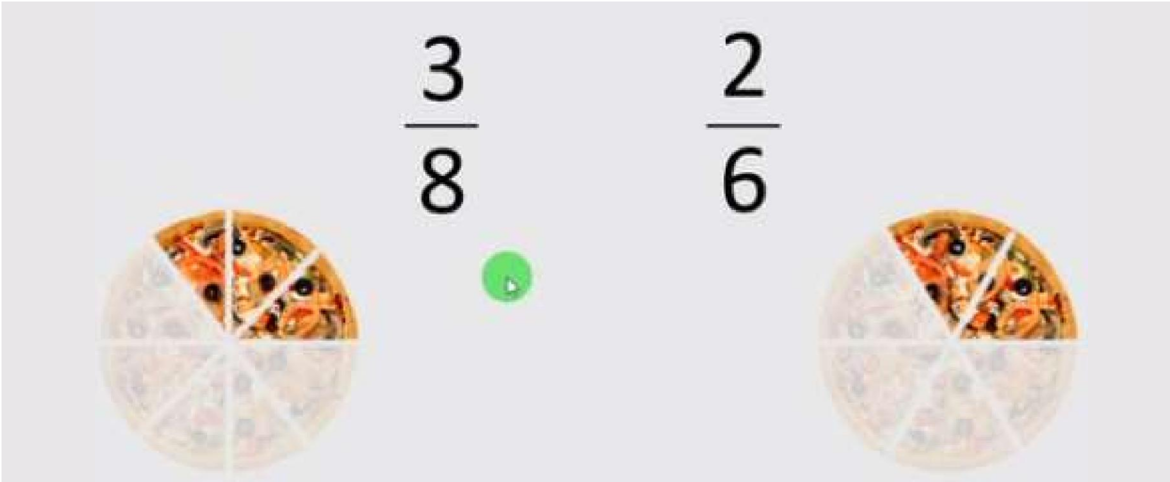
Ce este mai mare? O felie de pepene sau o jumatate de cireasa? Am taiat pepenele in 10 felii, iar cireasa in doua parti si cu toate acestea felia de pepene este mult mai mare decat jumatate de cireasa. Vedeti voi, valoarea unei fractii sau marimea unei fractii este data atat de numitor, adica numarul de parti la care impartim intregul, cat si de numarator, adica numarul de parti pe care le luam sau in alte cazuri, marimea intregului. Pana acum nu am invatat o metoda matematica sa ne spuna clar, este aceasta fractie mai mica decat aceasta sau mai mare sau sunt egale? Inca nu stim sa apreciem exact marimea unei fractii si sa o comparam cu cealalta, iar ochiul nu este suficient de exact.



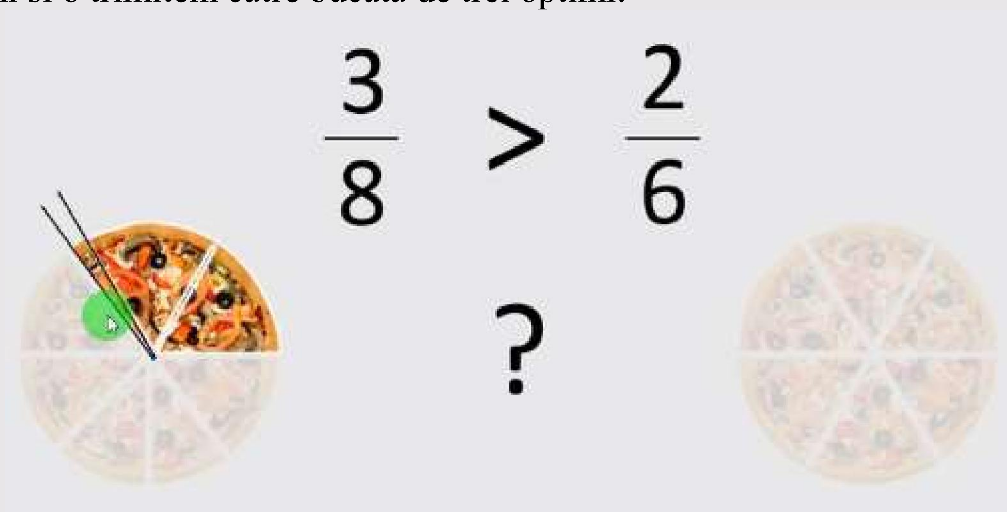
Sa incepem prin a compara intregi de aceeasi marime. Este mai simplu asa si noi invatam de la simplu la complicat. Impartim aceasta pizza in patru bucati, adica in sferturi, una din bucati o mancam, adica un sfert, 1/4, iar aceasta pizza o impartim in sase bucati, adica in sesimi, 3 sus, 3 jos si mancam doua din ele. In ce caz am mancat mai mult? Aici cand am mancat un sfert sau aici cand am mancat doua sesimi? Se vede clar ca cele doua sesimi sunt mai mari decat un sfert. Asadar 1/4 este mai mic decat 2/6. Dar stim noi oare sa facem aceasta comparatie, daca nu avem pizza? Matematica nu este despre pizza, matematica nu este nici macar despre numere. Matematica este despre concepte si idei. Se intampla ca numerele sa fie foarte utile in matematica, de exemplu daca am avea aceasta comparatie de fractii 1/4 si 2/6 am sti noi sa o rezolvam fara sa ne gandim la pizza sau la alte lucruri care se impart la 4 si la 6? Haideti sa mai luam totusi un exemplu cu pizza, ca sa descoperim mecanismul din spatele acestor fractii, cand o fractie este mai mica sau mai mare decat cealalta de fapt?



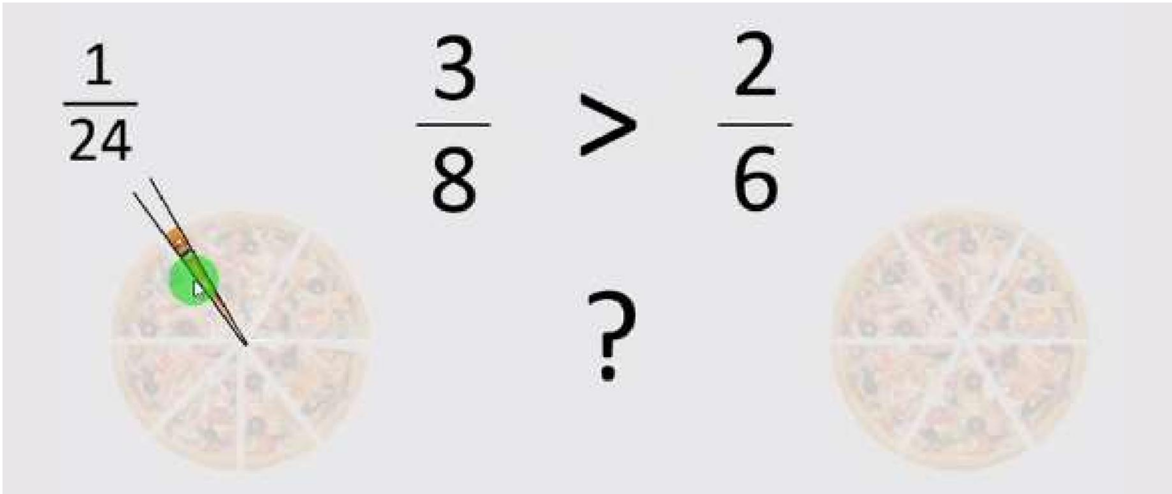
Pe pizza din stanga o taiem in opt felii egale si iau trei, iar pizza din dreapta o impart in sase si iau doua. Acum trebuie sa comparam 3/8 si 2/6. Ei, vedeti voi, lucrurile nu mai sunt asa de evidente pentru ochi. In matematica observatia cu ajutorul ochiului functioneaza doar in anumite cazuri, dar daca noi o sa gasim aici o regula care sa ne spuna clar ce fractie este mai mica si mai mare, atunci nu o sa mai avem nevoie nici de pizza, nici macar de ochi. Vedeti acum, daca ne este foarte foame si vrem sa mancam cel mai mult si un bucatar ne ofera doua variante: ori 3/8 din pizza din stanga ori 2/6 din pizza din dreapta, adica tai pizza in sase bucati si iti dau doua sau vrei sa tai pizza in opt bucati si sa iti dau mai multe, adica trei. Chiar nu stim ce sa alegem!



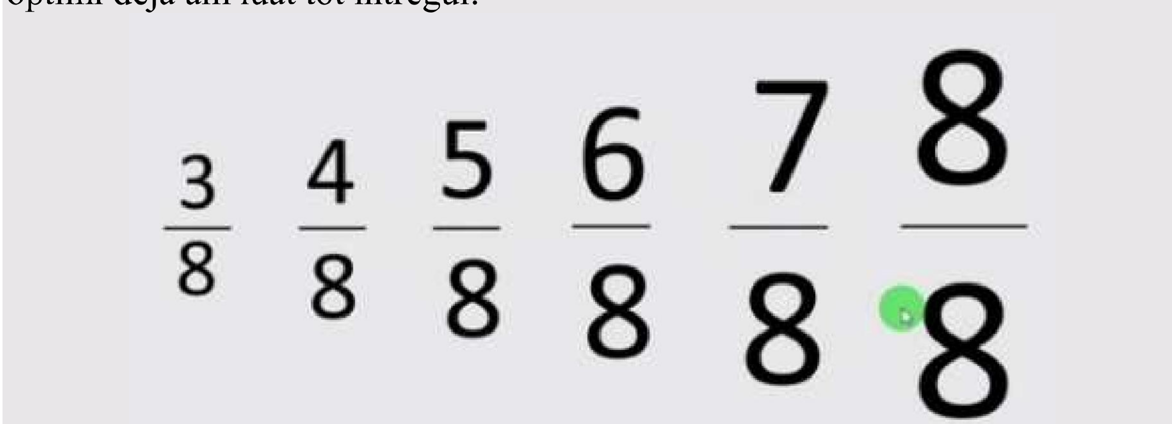
In ce caz mancam mai mult, in cazul din stanga sau in cazul din dreapta? Si uite asa sunt pacaliti oamenii care nu stiu matematica si nu vorbesc aici doar de pizzerii sau de petreceri intre prieteni. De data aceasta iti spun eu care fractie este mai mare, dar este ultima data. De acum incolo o sa te invat pe tine sa faci aceste comparatii, fara sa ai nevoie de pizza. Dar cum? Mai intai vreau sa va arat foarte clar ca 3/8 este intr-adevar mai mare decat 2/6. Luam bucata de doua sesimi si o trimitem catre bucata de trei optimi.



Iata ca aici a aparut o diferenta, bucata de 3/8 este un pic mai mare si cea care reprezinta 2/6 nu a putut sa o acopere in intregime, a ramas aici o bucatica mica de tot, aceasta este diferenta de fapt, intre 3/8 si 2/6, ceea ce ne dovedeste noua ca 3/8 este mai mare, ca daca scadem una din cealalta ramane o diferenta, oricat de mica, dar ramane o diferenta. Aceasta diferenta este de fapt 1/24.

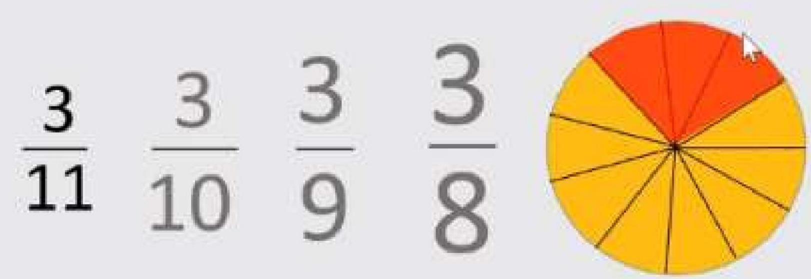


Cum am stiut oare? De unde stiu eu ca este 1/24? Vreti sa aflati si voi? Nu pare o vrajitorie matematica? De unde sa stii ca 3/8 minus 2/6 este exact 1/24? Ei, tocmai asta am sa-i invat pe ucenicii mei vrajitori in aceasta lectie si in lectiile care urmeaza, dar trebuie sa fii foarte atent. Doua secunde din acest film daca ai pierdut, nu o sa mai intelegi. Incepem? Aseaza-te bine pe scaun, pune-ti centura de siguranta si fii numai ochi si urechi!
O fractie este compusa din numarator, adica partea de sus, linia de fractie si numitor. Numaratorul numara partile pe care le luam dintr-un intreg, iar numitorul este numarul de parti in care taiem intregul. Sa vedem acum ce se intampla cu o fractie daca ii modificam numitorul sau numaratorul. Se micsoreaza sau se mareste? De exemplu daca modificam numaratorul ea se mareste, pentru ca luam mai multe parti. Aici am luat 3/8, apoi daca luam 4 optimi normal ca este mai mult, ca sunt patru, daca luam cinci optimi este si mai mult, daca luam sase optimi este si mai mult, sapte optimi, daca luam opt optimi deja am luat tot intregul.



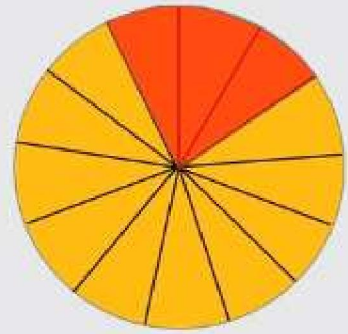
Vedeti cum creste numaratorul, creste si fractia. Fractia creste odata cu numaratorul. Iata ca deja am invatat ceva. Cu cat este mai mic numaratorul, cu atat fractia este mai mica. Putem sa punem acum semnul de mai mic

intotdeauna daca numaratorul este mai mic, dar exista o conditie foarte importanta: numitorul trebuie sa fie la fel, altfel ne pacalim. Deci tot timpul daca avem acelasi numitor si numaratorul este diferit, fractia mai mica este cea care are numaratorul mai mic, adica atunci cand luam mai putine bucatele. Aceasta este foarte important, este aproape jumatate din ce o sa va spun azi.
Si ne-a ramas sa modificam numitorul. Sa luam fractia noastra 3/8 pe care o cunoastem deja. Iata aici desenata 3/8 si sa marim numitorul. 3/9. Cum este 3/9 fata de 3/8. Mai mic sau mai mare? Este mai mic, pentru ca am impartit intregul in mai multe felii. In primul caz imparteam pizza in 8 si mancam trei, in al doilea caz o impartim in 9. Deci felia este mai mica, pentru ca impartim in mai multe parti si mancam tot trei. Aici mancam trei felii mai mari si aici mancam trei felii mai mici. Deci fractia aceasta cu numitorul mai mare este mai mica de fapt. Fii atent cum se micsoreaza zona rosie, partea pe care o mancam noi, atunci cand numitorul se mareste, adica atunci cand impartim pizza in din ce in ce mai multe parti. Iata la 10, la 11.



Vezi cum se micsoreaza aceasta parte rosie si totusi avem tot trei bucati, dar bucatile sunt din ce in ce mai mici. Vreau sa va mai arat o data cum se micsoreaza partea rosie, adica partea care contine cele trei felii. Uitati-va cu atentie aici la partea rosie: 3/8, 3/9, 3/10, 3/11, 3/12, 3/13. Si am mai invatat ceva foarte important. Daca avem acelasi numarator, adica daca luam acelasi numar de bucati, cu cat numitorul este mai mare, cu atat fractia este mai mica, pentru ca bucatile or fi ele tot atatea, dar sunt mai mici. Cele trei bucati sunt mai mici, sunt din ce in ce mai mici si atunci fractia, toata valoarea fractiei este mai mica. Aceasta selectie rosu-portocaliu este valoarea fractiei.

$$\frac{3}{13} < \frac{3}{12} < \frac{3}{11} < \frac{3}{10} < \frac{3}{9} < \frac{3}{8}$$

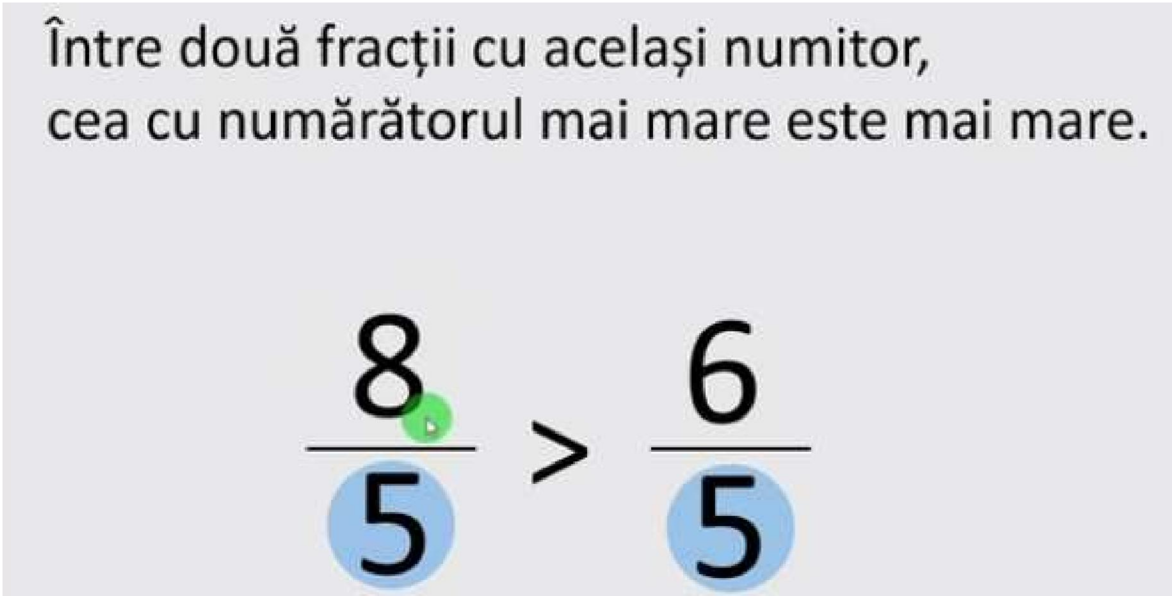


Fractia cu numitorul mai mare este mai mica, daca avem acelasi numarator, evident. O sa vedeti voi ca in lectiile urmatoare o sa invatam sa comparam fractii care au si numitorul diferit si numaratorul diferit. Atunci lucrurile se vor complica putin.

In aceasta lectie am facut insa primul pas, compararea fractiilor cu acelasi numitor si acelasi numarator. Haideti sa comparam acum 3/8, fractia noastra, adica trei optimi si sa marim numaratorul 4, 5. Sa comparam pe 3/8 cu 5/8. Acum stim, evident si mi se pare chiar foarte simplu ca 3/8 este mai mica decat 5/8, pentru ca numaratorul este mai mic si avem acelasi numitor. Mai mult, atat timp cat va fi acelasi numitor, chiar nu conteaza ce numitor este, fractia noastra 3 pe oricat va fi mai mica tot timpul decat fractia 5 pe acelasi lucru. Stim ca este acelasi numitor si semnul intrebarii nu este chiar placut si putem sa punem x. 3/x este mai mic decat 5/x. Atentie mare tot timpul, pentru ca x este la numitor este diferit de 0, altfel ne explodeaza caietul.

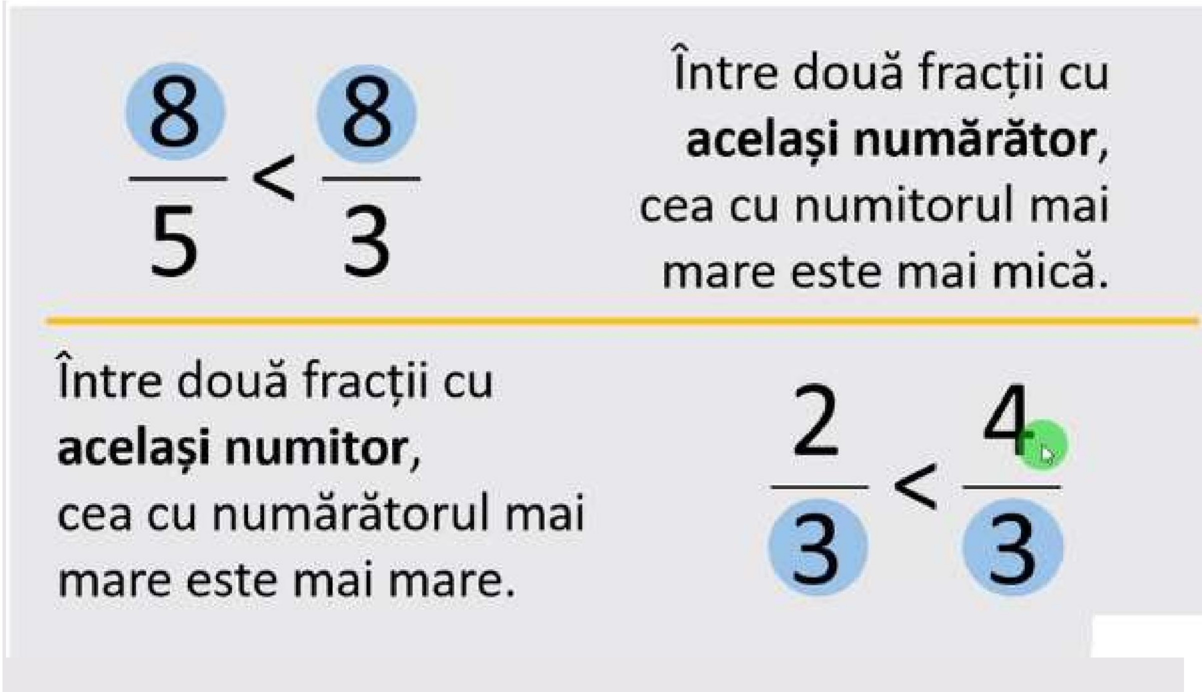
$$\frac{3}{x} < \frac{5}{x} \qquad x \neq 0$$

Acum sa pastram acest x la numitor si in stanga si in dreapta, acelasi numitor si sa modificam numaratorii. Daca aici este 9 si aici este 7, atunci 9/x este mai mare decat 7/x, luam 9 bucati comparativ cu 7 bucati sau 15/x comparat cu 21/x, stim tot timpul ca 21 este mai mare decat 15. Atunci si fractia 21/x va fi mai mare decat fractia 15/x. La fel si 8/x cu 9/x. 9/x este mai mare. Intre doua fractii cu acelasi numitor cea cu numaratorul mai mare este mai mare. Aici avem numaratorul mai mare si fractia este mai mare.



Daca avem in schimb acelasi numarator, de exemplu 3, pe 3/2 il comparam cu 3/4, atunci fractia mai mica este cea cu numitorul mai mare, pentru ca intregul se imparte in mai multe felii si feliile sunt mai mici si pentru ca sunt tot trei, trei felii mai mari inseamna mai mult decat trei felii mai mici. Intre doua fractii cu acelasi numarator, cea cu numitorul mai mare este mai mica, pentru ca feliile sunt mai mici.

Iata ce ai invatat astazi si nu vei mai putea uita niciodata, pentru ca ai inteles foarte bine. Intre doua fractii cu acelasi numarator, cea cu numitorul mai mare este mai mica, pentru ca am impartit intregul in mai multe parti si partile sunt mai mici. Intre doua fractii cu acelasi numitor, cea cu numaratorul mai mare este mai mare, pentru ca luam mai multe parti, iar partile sunt egale.



- În cazul a două fracții pozitive cu **numărători și numitori diferiți**, se aduc mai întâi fracțiile la același numitor, fracția cu numărător mai mare este mai mare decât cealaltă: 8/9 ? 5/7 => (8 * 7) / (9 * 7) ? (5 * 9) / (7 * 9) => 56/63 > 45/63
- Dacă două fracții negative au **același numitor**, atunci fracția care are numărătorul mai mare este mai mică decât cealaltă: -2/7 > -6/7.
- Dacă două fracții negative au **același numărător**, fracția cu numitor mai mare este mai mare decât cealaltă: -5/9 > -5/7
- În cazul a două fracții negative cu **numărători și numitori diferiți**, se aduc mai întâi fracțiile la același numitor, fracția cu numărător mai mare este mai mică decât cealaltă: -8/9 ? -5/7 => - (8 * 7) / (9 * 7) ? - (5 * 9) / (7 * 9) => - 56/63 < - 45/63 => -8/9 < -5/7

- Introducerea si scoaterea intregilor dintr-o fractie.
  - INTRODUCEREA INTREGILOR IN FRACTIE
- Avem o cantitate, un intreg si 1/4. Intregul este impartit si el in patru parti, in sferturi, dar este totusi un intreg si-l notam ca atare. Se scrie asa si este egal cu sfertul plus intregul, dar intregul este de fapt patru sferturi, 4/4. Le adunam, aici avem patru patrimi si aici mai avem o felie, in total avem cinci felii. Asta inseamna ca un intreg si 1/4 este egal cu 5 felii, adica 5/4.

$$1\frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

- Si uite asa am introdus intregii in fractie. Aici avem o expresie cu intregii afara din fractie si aici avem o expresie cu intregii in fractie.
- Daca avem 2 intregi si un sfert, atunci scriem acest sfert, iar 2 intregi inseamna opt sferturi, 8/4. Opt sferturi cu inca un sfert fac 9 sferturi, 8 plus 1 este 9. Deci este egal cu 9/4, 9 sferturi. Iata cum am introdus numarul de intregi, adica 2, in fractie. 2 intregi si 1/4 este egal cu 9/4.

$$2\frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

- Dar 2 intregi si 3/4? Avem trei sferturi si cate sferturi sunt in doi intregi? 8, plus 8 sferturi. Si acum trebuie sa adunam opt sferturi si cu trei sferturi. Asta ne va da 11 sferturi. Dar cum nu putem sa lucram tot timpul cu sferturi si cu felii de mar, trebuie sa invatam un algoritm dupa care intregii se pot introduce in fractii si anume sa ne gandim ce am facut de fapt, ca sa aflam numarul de sferturi continute in acesti intregi, am inmultit intregii cu numitorul, adica cu 4. Am avut doi intregi, deci avem 2 ori 4, 8 sferturi. Numitorul ramane acelasi si inmultim numarul de intregi cu numitorul si adunam cu 3, acesta este noul nostru numarator.

$$2\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4 + 3}{4}$$

- Ca sa introducem intregii in fractie, am luat numarul de intregi, i-am inmultit cu numitorul si i-am adunat la numarator. De acum trebuie rezolvate aceste calcule: 4 este numitorul, 2 ori 4 este 8, plus 3 este 11. 2 intregi si 3/4 este egal cu 11/4.
- Sa luam o fractie un pic mai grea, ca sa nu mai gandim in sferturi si in felii de mar. 5 intregi si 3/7. Ca sa aflam numarul de septimi din 5 intregi trebuie sa inmultim pe 5 cu 7 si atunci scriem asa: numitorul ramane tot 7, 5 ori 7 plus 3 si este egal cu 35 plus 3 si este egal cu 38/7. Observati ca intotdeauna daca introducem intregii in fractie, rezultatul va fi neaparat o fractie supraunitara.

$$5\frac{3}{7} = \frac{5\cdot 7 + 3}{7} = \frac{35+3}{7} = \frac{38}{7}$$

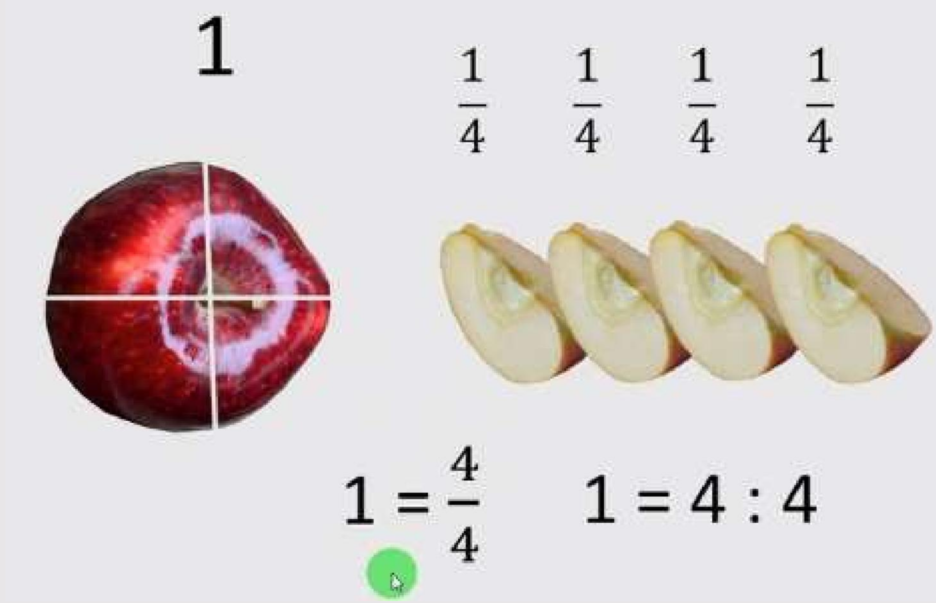
- Sa vedem si cazul general: a intregi si b/n. Vrem sa introducem intregii a in fractie, numitorul ramane acelasi, dar il inmultim pe a cu n si-l scriem la numarator, apoi il adunam pe b. Trebuie sa fim totusi atenti ca n sa fie diferit de 0.

$$a\frac{b}{n} = \frac{a\cdot n + b}{n}$$

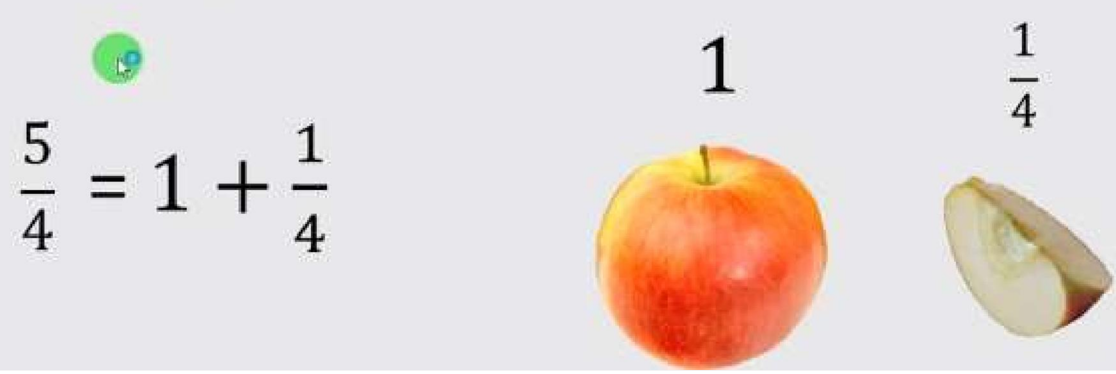
$$n \neq 0$$

SCOATEREA INTREGILOR DIN FRACTIE

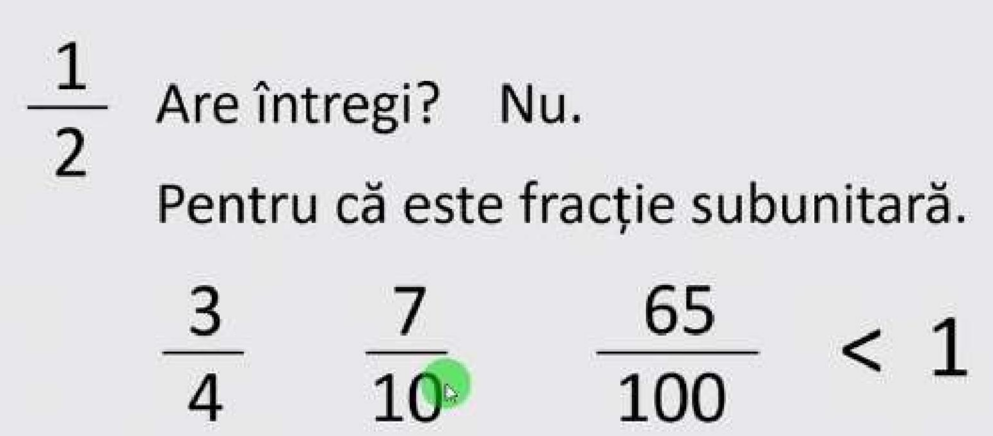
Acest mar reprezinta unitatea noastra, 1. Unitatea o impartim in patru parti egale, adica in sferturi si formam 4 felii. Fiecare felie se numeste sfert sau 1/4. Toate adunate dau un mar, dau un intreg: 1/4 plus 1/4 plus 1/4 plus 1/4 inseamna patru patrimi sau 4/4, care este 1. Stim ca linia de fractie este de fapt o impartire: 4 impartit la 4 este 1. Aceasta fractie contine in ea un intreg. Despre aceasta este vorba in aceasta lectie, care fractii contin in ele intregi si cum ii scoatem afara, cum ii evidentiem?



Hai sa adaugam o noua felie la aceasta colectie de felii. Acum avem cinci felii sau cinci patrimi. Aceasta fractie contine in ea un intreg, adica acest intreg, adica cele patru patrimi de mai inainte. Putem scrie ca 5 patrimi sau 5/4 este egal cu un intreg si inca o patrime, si inca o felie. Vedeti, asta inseamna ca am scos intregul din fractie. Ne-am uitat la fractie si am zis: hmm, asta are in ea de fapt un intreg. Hai sa il evidentiem separat, sa il scriem separat si am scris 5/4 este egal cu 1 si inca 1/4. Asadar din cinci sferturi de mar, prin scoaterea intregilor, am ajuns la un mar si un sfert.



Dar nu toate fractiile au intregi inauntru. De exemplu 1/2 are intregi? Nu are, pentru ca 1/2 este jumatate de intreg, nici macar nu ajunge la un intreg. 1/2 nu are intregi pentru ca este fractie subunitara, adica sub intreg, mai mica decat 1. 3/4 nu are nici el intregi, pentru ca si el este o fractie subunitara, adica are numaratorul mai mic decat numitorul. 7/10 nu are nici el intregi, tot fractie subunitara. Impartim intregul in zece parti si luam doar sapte, nu le luam pe toate. La fel si 65/100, impartim intregul in 100 de parti si luam doar 65, 65 de sutimi. Toate aceste fractii sunt subunitare, sub 1 sau mai mici decat 1. Recunoastem o fractie subunitara pentru ca numaratorul este mai mic, luam mai putine parti decat numarul de parti la care impartim intregul.



Am vazut ca 1/2 este mai mic decat 1 si este fractie subunitara. Dar 2/2? Daca impartim intregul in doua parti si le luam pe toate? Daca il impartim in sapte parti si le luam pe toate? Inseamna ca am luat tot intregul. Acestea se numesc fractii echiunitare si au valoarea egala cu 1. Dar 3/2? Aceasta este o fractie supraunitara, pentru ca este egala cu 1 plus inca jumatate. Vedeti, avem doua jumatati plus inca una, trei jumatati. Cele doua jumatati formeaza un intreg si mai avem in plus inca o jumatate. 3/2 este mai mare decat 1, o numim fractie supraunitara, adica peste 1, deasupra lui 1. Dintre toate aceste fractii, care contin intregi? Bineinteles cele echiunitare, care contin doar un intreg, dar foarte interesante sunt fractiile supraunitare, care contin un intreg si inca ceva sau mai multi intregi sau mai multi intregi si inca ceva fractionar.

Doar fractiile echiunitare si supraunitare contin intregi. Cele echiunitare contin un singur intreg, cele supraunitare pot contine mai multi. De exemplu 4/2 este o fractie supraunitara, pentru ca numaratorul este mai mare decat numitorul. La fel era si 3/2, numaratorul mai mare, 3 mai mare decat 2. 4/2 inseamna patru jumatati, doua jumatati aici, doua jumatati aici. Am impartit toate merele pe care le-am avut in doua bucati si am luat 4. Avem un intreg aici, doua jumatati si inca un intreg aici, inca doua jumatati, avem in total 2 intregi.

$$\frac{3}{2}$$

Doar fracțiile echiunitare și supraunitare conțin întregi

$$\frac{4}{2} = 2$$

Dar sa vedem cum aflam acest numar de intregi, matematic, sa folosim un algoritm. Doar nu o sa desenam tot timpul pe caiet felii de mere si bucati de pizza. Haideti incercam cu o fractie simpla, de exemplu 5/2. Cati intregi contine 5/2? Intrebarea care se pune de fapt este cati intregi avem in cinci jumatati si ca sa o aflam il luam pe 5 si il impartim la 2, ne da 2 rest 1. Adica 2 intra de doua ori in 5 si mai ramane 1, mai ramane o jumatate. Asta inseamna ca avem doi intregi si inca o jumatate si putem sa omitem semnul plus. Si atunci avem doi intregi si jumatate.

$$\frac{3}{2}$$

Doar fracțiile echiunitare și supraunitare conțin întregi

$$\frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \qquad 5 : 2 = 2 \text{ rest } 1$$

Ia sa vedem acum ce se intampla cu opt treimi. Il luam pe opt si il impartim la trei, sa vedem cati intregi avem in opt treimi? 8 impartit la 3 este 2, ca 2 ori 3 este 6 si mai raman doua treimi. Deci avem doi intregi si doua treimi.

$$\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \qquad 8 : 3 = 2 \text{ rest } 2$$

Dar la 34 de cincimi? Il luam pe 34, il impartim la 5, ne da 6, adica avem sase intregi, pentru ca din 34 putem sa formam sase grupuri de cate cinci, adica sase intregi si ne mai raman patru. Avem sase intregi si 4/5. Si ultima fractie din care scoatem intregii este 97/10. Il impartim pe 97 la 10, adica impartim numaratorul la numitor, facem impartirea, dar o facem cu rest. Ne da numarul de intregi si restul este de fapt cantitatea de fractii care ne ramane, adica 7, 7/10. Ati observat utilitatea acestei tehnici. 97/10 nu imi spune mare lucru, dar in in forma 9 intregi si 7/10 imi spune mai multe, ca avem 9 intregi, 9 mere, 9 lucruri, 9 pizza si asa mai departe si inca putin. Scoaterea intregilor din fractie ne ajuta sa ne dam seama de valoarea acestei fractii. In fond pe noi ne intereseaza cati intregi sunt aici, cat de mare este fractia si eventual ne mai intereseaza si ce mai ramane din urmatorul intreg, iar fractia in sine nu ne spune acest lucru direct, in mod vizibil.

$$\frac{97}{10} = 9\frac{7}{10} \qquad 97 : 10 = 9 \text{ rest } 7$$

- Aflarea unei fractii dintr-un numar si a unui numar cand se cunoaste o fractie din el

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

TEORIE: AFLAREA UNEI FRACȚII DINTR-UN NUMĂR SAU DINTR-O FRACȚIE

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural, înmulțim fracția cu numărul respectiv:

$\frac{a}{b}$ *din c este* :

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Pentru a afla o fracție dintr-o altă fracție, înmulțim cele două fracții astfel: se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei:

$\frac{a}{b}$ *din* $\frac{c}{d}$ *este*:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

*TEORIE: AFLAREA UNEI FRACȚII DINTR-UN NUMĂR SAU DINTR-O FRACȚIE*DESCARCĂ PDF

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural, înmulțim fracția cu numărul respectiv:

$\frac{a}{b}$ *din c este* :

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

Pentru a afla o fracție dintr-o altă fracție, înmulțim cele două fracții astfel: se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei:

$\frac{a}{b}$ *din* $\frac{c}{d}$ *este:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

o Fractii zecimale: compararea fractiilor zecimale

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

COMPARAREA FRACTIILOR ZECIMALE

Atunci cand mergem la piata in Romania, in Spania sau oriunde in Europa sau in lume, suntem pusi in situatia de a compara preturi. De exemplu aici vrem sa cumparam masline si maslinele au preturi diferite, asa cum au si denumiri diferite. De exemplu aceste masline se numesc Aceituna Aragon, iar pretul lor este de 7 euro 50, iar aceste masline amestecate si cu alte muraturi costa 6 euro 50, aceste masline costa 7,90 euro si acestea costa 6,99 euro. Atunci cand vrem sa cumparam ceva trebuie sa comparam preturile, in general avem de ales intre mai multe marfuri, iar compararea acestor preturi inseamna compararea fractiilor zecimale, pentru ca preturile in general sunt scrise sub forma de fractii zecimale, adica numere cu virgula. Ei, in aceasta lectie vom invata cum se compara fractiile zecimale si care este algoritmul matematic de comparatie. De exemplu, pe aceasta taraba care sunt cele mai scumpe masline? Imediat o sa descoperiti cred ca cele mai scumpe masline sunt acestea din planul indepartat, care costa 7,90 euro, iar cele mai ieftine masline sunt acestea care sunt amestecate cu alte muraturi, cu castraveti de exemplu si cu gogosari, care costa 6 euro jumatate.

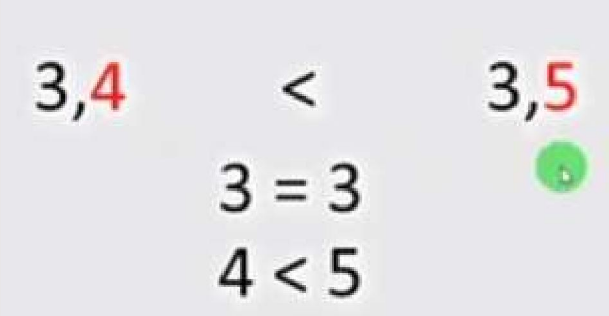
Sa luam acum toate preturile de pe aceasta taraba. Sa incepem cu 7,90 apoi 6,99, apoi 7,50 si apoi 6,50. Ne propunem sa comparam aceste numere, adica 6,50 cu 6,99 si 7,50 cu 7,90. V-ati dat seama ca nu este deloc greu. 7,50 este mai mic decat 7,90, pentru ca sunt tot sapte intregi, dar aici avem cinci zecimi, iar aici avem mai multe zecimi, adica 9. 6,50 este mai mic decat 6,99, pentru ca avem tot sase intregi, dar aici avem mai putine zecimi, avem 5, fata de noua zecimi si inca noua sutimi. Dar oare toate cazurile de comparatie intre fractii zecimale sunt asa de simple? Ei, aproape! Exista si cateva capcane, dar am sa vi le spun acum ca sa nu cumva sa cadeti in ele pe viitor.

Sa luam 0,85 si 1,42. Acum care este mai mare? Vedem noi ca 85 este mai mare decat 42, dar aici avem un intreg, iar aici nu avem niciunul, pentru ca 0 este mai mic decat 1, 0,85 este mai mic decat 1,42. Daca aceste doua ar fi preturi, aici am avea 85 de centi si aici am avea un euro si 42 de centi. Clar un euro este mai mare decat 0,85. Dar cum am facut de fapt? Ne gandim cum am facut aceasta comparatie. Am comparat unitatile si apoi daca unitatile au fost diferite, nu ne-au mai interesat zecimalele, nu mai conteaza. Spunem ca 0 este mai mic decat 1 si de aici rezulta ca 0,85 este mai mic decat 1,42.

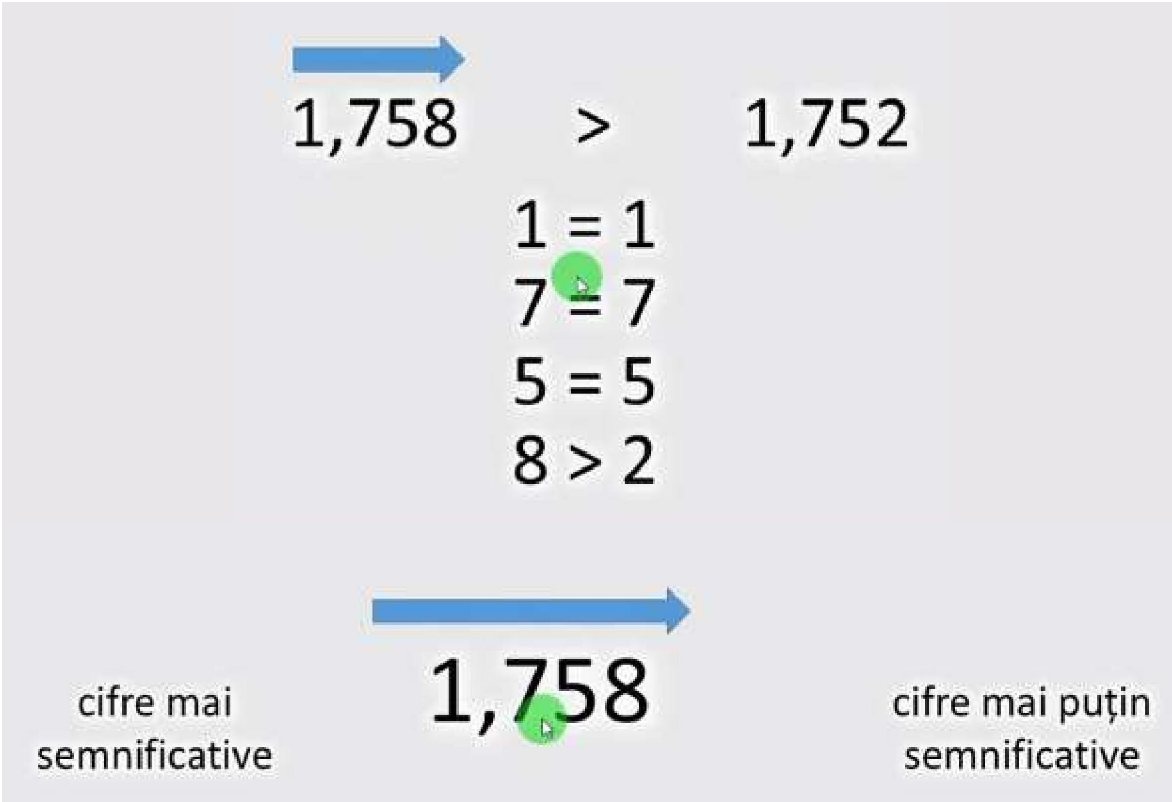
$$0{,}85 \quad < \quad 1{,}42$$

$$0 < 1$$

Sa luam acum 7,9 si 5,2. Iarasi comparam unitatile. Daca unitatile sunt diferite, atunci numerele sunt diferite si acel numar este mai mare care are unitatea mai mare. Aici 7,9 clar este mai mare decat 5,2. Dar sa comparam acum 3,4 cu 3,5. Aici comparam unitatile si observam ca sunt egale. Inca nu ne-am lamurit care este mai mare, trebuie sa mergem mai incolo, mai in dreapta, sa analizam putin si zecimile si vedem ca zecimile sunt diferite, adica 4 este mai mic decat 5. Asta inseamna ca 3,4 este mai mic decat 3,5 pentru ca 3,5 are o zecime in plus. Atentie, zecime nu este acelasi lucru cu zecimala. Toate cifrele de dupa virgula sunt zecimale, dar numai prima cifra de dupa virgula este o zecime, adica a zecea parte din unitate. Urmatoarea cifra dupa virgula, adica a doua, este sutime, dar la toate le spunem zecimale.

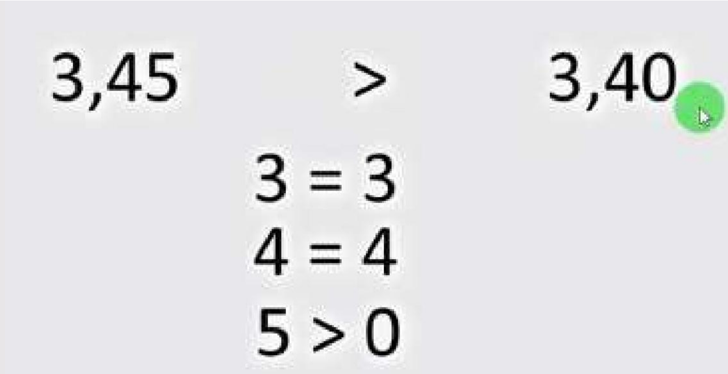


Sa comparam acum 1,758 cu 1,752. In acest caz unitatile sunt egale, mergem mai departe la zecimi, 7 cu 7 este egal, mergem la sutimi, 5 cu 5 este egal, pana acum numerele sunt egale, dar la miimi observam ca 8 este mai mare decat 2. Avem 8 miimi aici si 2 miimi aici. Acest numar este mai mare cu 6 miimi, vedeti, 8 miimi minus 2 miimi, 6 miimi, in rest sunt identice. Deci acest numar este totusi mai mare, chiar daca diferenta dintre ele este foarte mica. Observati cum intotdeauna luam cifrele de la stanga la dreapta, pentru ca astea de la stanga sunt mai importante, sunt unitati mai mari, este mai mult o unitate decat o miime sau chiar decat 6 miimi, iar numerele le comparam in felul urmator: luam cifrele de la stanga la dreapta si comparam una cate una de pe locuri corespondente, adica unitati cu unitati, zecimi cu zecimi, sutimi cu sutimi, miimi cu miimi. Daca sunt egale mergem mai departe, daca sunt diferite ne-am oprit si in felul acesta punem semnul. Daca luam un numar zecimal, adica un numar cu virgula, de exemplu 1,758, cu cat cifrele sunt mai in stanga sunt mai semnificative, semnifica unitati mai mari, iar cu cat cifrele sunt mai in dreapta sunt mai putin semnificative. Adica sunt mai mici si devin din ce in ce mai mici pe masura ce mergem in dreapta.



Sa comparam acum 2,79 cu 2,69. Mergem de la stanga la dreapta si comparam 2 cu 2 este egal, mergem mai departe, apoi comparam 7 cu 6. Ati vazut ca aici exista o diferenta, aici avem 7 zecimi, iar aici doar 6 zecimi. Cele doua numere sunt diferite si 2,79 este mai mare decat 2,69, chiar daca dupa 7 mai avem orice altceva, orice altceva ar fi, daca zecimile numarului din stanga sunt mai multe decat zecimile numarului din dreapta si avem acelasi numar de unitati, atunci numarul din stanga este mai mare.

3,45 comparat cu 3,4. Iarasi luam de la stanga la dreapta. 3 egal cu 3, mergem mai departe, 4 egal cu 4, mergem mai departe, 5 egal cu.. cat o fi aici? Cu cat sa il comparam pe 5, pentru ca numarul din dreapta nu mai are sutimi? Dar noi stim ca intotdeauna putem adauga un zero dupa virgula, la coada dupa virgula, iar valoarea numarului nu se schimba, daca nu sunt scrise sutimi, inseamna ca nu sunt, adica sunt 0. Putem sa punem oricand 0 sutimi si sa comparam 5 sutimi de aici cu 0 si este clar ca 5 este mai mare, deci 3,45 este mai mare decat 3,40.



Avem acum 2,999 comparat cu 3,01. Observam din prima ca intregii sunt mai putini in stanga, deci numarul din stanga este mai mic, nu mai conteaza zecimile in acest caz.

Acest exercitiu ne cere sa ordonam numerele zecimale. Ca sa le ordonam crescator trebuie sa luam de la mic la mare. Incepem prin a cauta cea mai mica fractie zecimala, cel mai mic numar din acest sir. Prima data ne uitam la unitati: 7, 3, 0, 9, 3, 1. 0 pare sa fie cea mai mica si intr-adevar 0 este cea mai mica, pentru ca nu mai exista nici un numar cu zero unitati. Scriem 0,3 aici primul, il subliniem pe cel pe care l-am luat din sir, sa nu il mai luam inca o data, punem un semn de mai mic aici sa stim ca el este cel mai mic si continuam. Acum il cautam pe cel mai mic dintre cele ramase. 0,3 nu mai intra in discutie, a iesit din sir. Ne uitam iar la unitati, 7, 3, 9, 3, 1. 1 este cea mai mica unitate, deocamdata nu am avut nevoie sa ne uitam la zecimale, pentru ca am comparat doar unitatile si a fost suficient. Trecem 1,869 aici, il subliniem ca a iesit din sir, mai mic. Acum avem aceste doua numere 3,04 si 3,2. Trebuie sa decidem care din ele este mai mic, pentru ca au unitatile egale. Ne uitam la zecimi, aici avem 0 zecimi, aici avem 2 zecimi. 0 mai mic decat 2, 3,04 mai mic decat 3,2. Il scriem, il scoatem din sir prin subliniere si continuam, mai mic decat, acum a ramas 3,02, il punem aici, urmatorul este 7 ca este mai mic decat 9, il punem aici si urmatorul si ultimul este 9, il subliniem si il punem in sir. Acesta este sirul de fractii zecimale ordonat si da, 9 este si el o fractie zecimala, pentru ca putem sa il imaginam ca 9,000.

Ordonați crescător următorul șir de fracții zecimale:

7,52 3,04 0,3 9 3,2 1,869

$0,3 < 1,869 < 3,04 < 3,2 < 7,52 < 9$

o Transformarea unei fractii zecimale in fractie ordinara Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

TRANSFORMAREA UNEI FRACTII ZECIMALE PERIODICE IN FRACTIE ORDINARA

Stim sa transformam o fractie ordinara intr-o fractie zecimala, prin impartire. 3 pe 2 este egal cu 3 impartit la 2 si este egal cu 1,5. Dar invers stim? In cea mai mare parte stim. De exemplu, 5,23, luam numarul ca atare, fara virgula, 523 si il impartim la 1 urmat de cate zerouri a migrat virgula, de aici, pana aici, impartit la 100. Deci 5,23 este 523 supra 100. 0,078 este 78 supra cate locuri a migrat virgula, 1, 2, 3, impartit la 1000, iar pe 1,5 daca dorim sa il transformam intr-o fractie ordinara, atunci il asezam aici ca si 15 supra 10, pentru ca virgula s-a miscat un singur loc la stanga. 15 supra 10. Dar nu este 3 pe 2? Ba da, este 3 pe 2, pentru ca putem sa-l simplificam cu 5 si atunci avem 3 supra 2.

$$5,23 = \frac{523}{100} \qquad 0,078 = \frac{78}{1000}$$

$$1,5 = \frac{15}{10}^{(5} = \frac{3}{2}$$

Intr-o lectia anterioara am descoperit ca nu toate impartirile se termina frumos, unele nu se termina deloc, unele se repeta, tot felul de ciudatenii. Pe aceste fractii zecimale notate cu negru stim cum sa le aducem la forma de fractie ordinara, adica sa reconstituim impartirea: 1 impartit la 4, 1 impartit la 5 si asa mai departe. Dar ce ne facem cu celelalte? Cum reconstituim impartirea daca avem un numar ca acesta? Va intrebati probabil dar de ce am vrea acest lucru? Am vrea pentru ca fractia periodica nu este exacta. Ce am scris aici sau chiar daca punem parantezele acelea, in aceasta forma numarul nu se poate scrie exact, tot timpul vor ramane o parte din zecimale nescrise si ati vazut ca daca facem proba impartirii nu o sa ne dea exact, in schimb daca scriem numerele sub forma de fractie, aceasta este exacta, fractia ordinara este exacta, in schimb fractia zecimala, care nu se termina nu este exacta. De exemplu, aici putem discuta daca sa punem semnul de egal sau alt semn. Prima data as lua cea mai simpla fractie zecimala periodica, de exemplu 1 pe 3 este egal cu 0,333 3 in perioada. Haideti sa il transformam invers. Care este algoritmul prin care din 0,3 in perioada ajungem la 1 pe 3? Ce pot sa va spun de pe acum este ca nu mai este cu 10 la numitor, este cu 9. Haideti sa vedem! 1 supra 3 este egal cu 0,333 la nesfarsit este de fapt 0,3 in perioada, iar pe 0,3 in perioada il transformam in felul urmator. La numarator, la fel, punem numarul asa cum il vedem fara virgula, fara zero dinainte si fara paranteze, doar numarul natural, 3, da, la numitor in loc sa punem 10, punem 9 si avem 3 pe 9, care poate fi simplificat imediat cu 3 si avem 1 pe 3 exact de unde am plecat. Acum ca stim sa il transformam pe 0,3 in perioada inapoi in fractie ordinara, sa luam pe urmatorul, care este un pic mai complicat, pentru ca are si un 1 aici, care nu este in perioada, doar 6 este in perioada.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$$

$$0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

0,1 si 6 in perioada, cum se transforma inapoi in fractie ordinara? Bineinteles vom avea tot o fractie, la numarator vom avea numarul exact cum il citim aici, dar fara virgula si fara paranteze, numarul natural, curat, dar va trebui sa scadem din el numarul dinainte de perioada, numarul care nu este in perioada, la fel, fara virgula, fara nimic, fara zerouri, curat, numarul natural. De data aceasta este 1, pentru ca aici avem 0, 01 inseamna 1. La numarator avem 16 minus 1, la numitor avem atatea cifre de 9 cate cifre avem in perioada, adica in paranteza, in acest caz avem o singura cifra in perioada si atatia de zero cate cifre avem in afara perioadei, dar sa fie zecimale. Deci nu conteaza intregii, adica cifrele aflate intre virgula si paranteza. De data asta avem 1, o cifra. Punem un zero, mai departe, daca facem scaderea este 15 supra 90, putem sa simplificam cu 3, o sa avem 5 supra 30, mai putem simplifica si cu 5 si o sa avem 1 pe 6, pentru ca 5 impartit la 5 este 1, 30 impartit la 5 este 6. Iata ca am ajuns de unde am plecat.

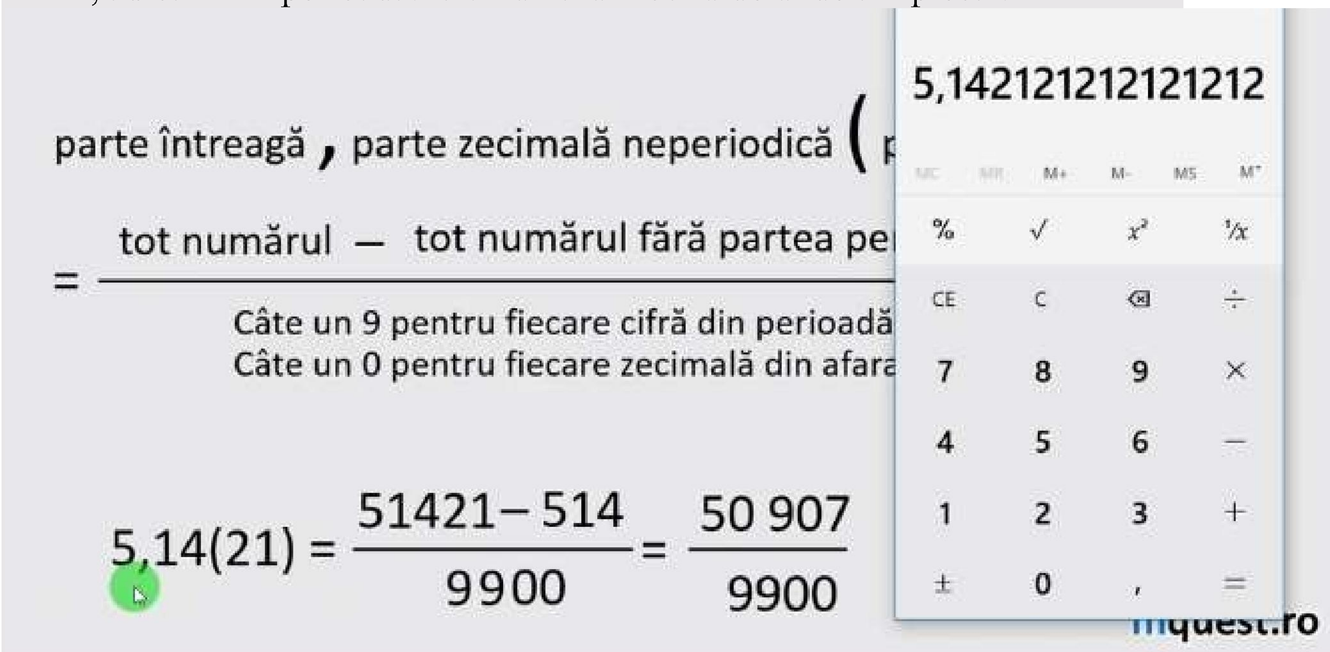
$$\frac{1}{6} = 0{,}1666... = 0{,}1(6)$$

$$0{,}1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{^{(3}15}{90} = \frac{^{(5}5}{30} = \frac{1}{6}$$

Regula pe care am folosit-o este urmatoarea. Avem o fractie zecimala, aici, un numar cu virgula, care este format din: partea intreaga, partea zecimala dinainte de perioada, ii spunem parte zecimala neperiodica, apoi in paranteze avem partea periodica, formata din mai multe cifre. Acest numar este egal cu o fractie la care punem la numarator tot numarul asa cum il citim, dar fara virgule si fara paranteze, numarul natural, din care scadem, deci minus, tot numarul fara partea periodica, adica tot numarul aceasta, partea intreaga si partea zecimala neperiodica la un loc, fara virgula, vazut ca un numar natural. La numitor avem cate un noua pentru fiecare cifra din perioada, urmat de atatea zerouri cate cifre zecimale avem inafara perioadei, deci nu conteaza partea intreaga, cate cifre avem de aici pana aici. Aceasta este fractia pe care o obtinem si daca efectuam impartirea obtinem inapoi fractia zecimala periodica de la care am plecat.

$$\text{parte întreagă}\,,\ \text{parte zecimală neperiodică}\ \big(\text{parte periodică}\big) = \frac{\text{tot numărul} - \text{tot numărul fără partea periodică}}{\begin{array}{l}\text{Câte un 9 pentru fiecare cifră din perioadă}\\ \text{Câte un 0 pentru fiecare zecimală din afara perioadei}\end{array}}$$

Haideti sa testam acum cu 5,14 si in perioada avem 21. La numarator avem numarul format din 5 1 4 2 1 adica 51421, din care scadem tot numarul fara partea periodica, adica, 5 1 4, 514. La numitor avem cate un 9 pentru fiecare cifra din perioada, 1, 2 si cate un 0 pentru fiecare zecimala din afara perioadei, 1, 2, apoi la numarator avem de efectuat o scadere, rezultatul acestei scaderii este 50907, va rog sa faceti scaderea daca nu ma credeti. Ei, acum facem impartirea 50907 impartit la 9900. Puteti sa o faceti pe caiet, eu am s-o fac cu calculatorul, ca sa nu va plictisesc. 50907 impartit la 9900 este egal cu 5 1 4 21 21 21, adica 21 in perioada. Iata numarul nostru de unde am plecat.



Astazi am aflat cum sa transformam inapoi fractiile zecimale periodice in fractii ordinare si avem trei cazuri. Primul caz este o fractie zecimala periodica simpla, fara parte finita. 0,2 in perioada, este 2, adica numarul natural pe care il vedem aici fara paranteze, fara zerouri in fata si fara virgula supra atati de 9 cate cifre avem in perioada. Al doilea caz, de exemplu 1,3, de data aceasta avem si parte intreaga si fractia ordinara este: la numarator avem numarul natural pe care il vedem, minus numarul care este in afara parantezei, 1 virgula si atat, deci este 1, supra atati de noua cati avem in paranteza. Al treilea caz este cand avem si zecimale finite si zecimale periodice, avem numarul asa cum il vedem adica 2345 minus partea care nu este in paranteza ignorand virgula, adica 234 supra atatea cifre de 9 cate cifre avem in interiorul parantezei si atatea cifre de 0 cate cifre avem in afara parantezei, dupa virgula.

$$0,(2) = \frac{2}{9}$$

$$1,(3) = \frac{13 - 1}{9}$$

$$2,34(5) = \frac{2345 - 234}{900}$$

o Transformarea unei fractii ordinare in fractie zecimala   Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

TRANSFORMAREA UNEI FRACTII ORDINARE IN FRACTIE ZECIMALA

Am invatat pana acum doua feluri de fractii: aceasta se numeste fractie ordinara, de exemplu 1 pe 2, care este egala cu 0,5, asta se numeste fractie zecimala. Cele doua sunt egale, dar sunt scrise diferit. In aceasta lectie ne vom ocupa de transformarea din aceasta forma in aceasta forma.

Deja stim sa transformam cateva fractii ordinare in fractii zecimale. De exemplu, 1 pe 2 transformat in fractie zecimala este 0,5, alta forma, aceeasi valoare. Fractia ordinara este compusa din 3 lucruri: numarator, linie de fractie si numitor, fractia zecimala este compusa din partea intreaga, o virgula si partea zecimala. Dar ce este de fapt fractia ordinara? Este o impartire nerealizata, linia de fractie semnifica impartirea: 1 pe 2 sau 1 impartit la 2. De exemplu 15 pe 3, este o impartire nerealizata, dar noi stim ca 15 impartit la 3 este 5. 5 este forma realizata a impartirii si o numim fractie zecimala, chiar daca in acest caz nu are virgula. Si fractiilor ordinare le poate lipsi cateodata numitorul, adica au numitorul 1. La fel si aici putem sa spunem ca are virgula 0. Dar 29 pe 5, cum se face? Trebuie sa facem pur si simplu impartirea. 29 impartit la 5. 5 in 29 de cinci ori, pentru ca 5 ori 5 este 25, ramane aici 4, coboram 0 de la zecimi, 5 in 40 de 8 ori, 8 ori 5 este 40, raspunsul este 5,8.

fracții ordinare | fracții zecimale

$$\begin{array}{r|l} 29 & 5 \\ \hline 25 & 5{,}8 \\ \hline 40 & \\ 40 & \end{array}$$

$$\frac{29}{5} = 29 : 5 = 5{,}8$$

Gata, am terminat! Asta este toata lectia de azi, cum sa transformam o fractie ordinara, care este de fapt o impartire nerealizata, intr-o fractie zecimala. Realizam impartirea, foarte simplu, nu? Transformarea din fractie ordinara in fractie zecimala inseamna sa rezolvam impartirea. Chiar daca am invatat acum sa transformam din fractii ordinare in fractii zecimale, tot mai am doua lucruri sa va spun, doua lucruri foarte interesante. Primul ar fi cum facem transformarea fara sa facem impartirea si al doilea este o datorie mai veche, era o impartire mai ciudata, la care am zis ca revenim ca s-o lamurim. Iata cum putem sa transformam o fractie ordinara in fractie zecimala fara sa impartim, dar fractia trebuie sa vrea, adica trebuie sa aiba un anumit fel de numitor. Numai anumite fractii pot fi transformate usor, foarte usor. De exemplu aceasta: 18 pe 10, il luam pe 18 si mutam virgula o pozitie la stanga si avem 1,8. 18 pe 10 transformata in fractie zecimala este 1,8. Dar 25 pe 100? Facem acelasi lucru, scriem 25 si mutam virgula doua pozitii, pentru ca avem aici doua zerouri, o pozitie, doua pozitii si punem un zero, pentru ca lipseste si 25 pe 100 este egal cu 0,25 si daca ne gandim putin 25 pe 100 este 25%, adica un sfert. Daca simplificam cu 25 avem 1 supra 4, care este un sfert, iar fractia zecimala pe care o avem aici 0,25 semnifica tot un sfert. Mai departe, 1 pe 100. Cat este forma lui zecimala? Este 0,01, pentru ca l-am luat pe 1, am imaginat virgula dupa el si am mutat virgula doua pozitii: una, doua si ne-a dat 0,01, adica o sutime. Se imparte intregul in 100 de bucati si luam doar una, asta inseamna o sutime.

$$\frac{18}{10} = 1{,}8 \qquad \frac{25}{100} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Dar 7 supra 5? Sigur, putem sa facem impartirea, 7 impartit la 5 este 1, pentru ca 2 ar fi 10 deja. 1 ori 5 este 5, facem scaderea, da 2, coboram 0 de la zecimi, acum punem virgula neaparat aici, 20 impartit la 5 este 4, 4 ori 5 este 20, am terminat impartirea, pentru ca aici da 0. Deci raspunsul exact este 1,4. Dar mai exista o cale chiar mai usoara de a transforma o fractie ordinara intr-o fractie zecimala. Avem 7 supra 5 si ideea este sa realizam aici numitorul 10 sau o putere a lui 10, adica 10, 100, 1000 si asa mai departe. Ca sa avem aici 10 ne mai trebuie un 2, pentru ca 2 ori 5 este 10. Ce ar fi sa amplificam cu 2, la numarator vom avea 14 si la numitor vom avea 10. Acum impartirea este foarte simpla, pentru ca luam pe 14, punem virgula aici sau imaginam virgula aici si o trecem o pozitie la stanga si am gasit raspunsul, este 1,4, ca si aici. Este ceva mai usor? Eu zic ca da! Intotdeauna prefer sa fac doua inmultiri fata de o impartire.

$$\frac{7}{5} = 1{,}4$$

2) $$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \cline{2-2} 5 & 1{,}4 \\ \hline 20 & \\ 20 & \end{array}$$

Dar pentru 24 supra 15? Putem gasi fractia zecimala fara sa facem impartirea? Sa ne gandim putin! La numitor avem un 3 si un 5, adica 3 ori 5. 5-ul este bun, ca din cinci putem sa scoatem un 10, prin inmultirea cu 2, dar 3-ul este in plus. Atata timp cat vom avea 3 aici, nu vom putea aduce numitorul la o putere a lui 10, trebuie sa scapam de 3 si ne uitam la numarator, ne ajuta el oare sa scapam de 3? Raspunsul este da, pentru ca 24 este divizibil cu 3, 3 este divizor comun, chiar cel mai mare divizor comun si putem linistiti sa simplificam cu 3 de data aceasta. 24 impartit la 3 este 8 si 15 impartit la 3 este 5. Ei, acum bine am intuit ca trebuie sa inmultim cu 2, adica sa amplificam cu 2, pentru a avea aici 10. Asta inseamna ca la numarator vom avea 16 si la numitor vom avea 10, e aproape gata, pentru ca rezultatul inseamna 1,6, am luat virgula si am trimis-o o pozitie la stanga. Evident nu ne putem juca asa cu toate fractiile, dar va recomand ca inainte sa treceti rapid la impartire, sa va uitati de doua ori la numitor si sa va ganditi, hmm, cum as putea sa aduc acest numitor la forma 10 sau 100, ce ar trebui sa ii fac si apoi ne uitam la numarator sa vedem daca numaratorul ne ajuta, in acest caz ne-a ajutat.

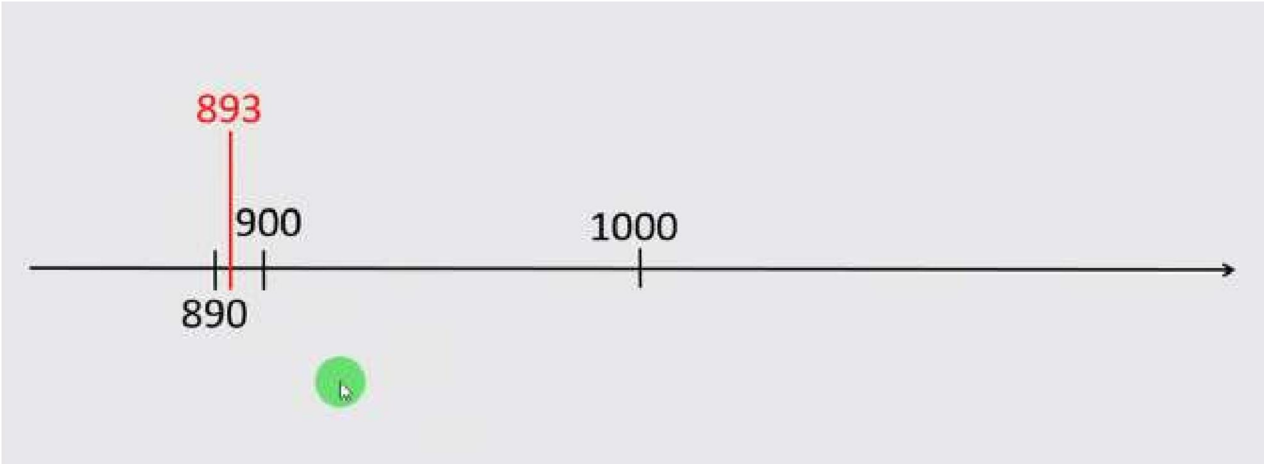
$$\frac{^{(3}24}{15} = \frac{^{2)}8}{5} = \frac{16}{10} = 1,6$$

o Aproximari

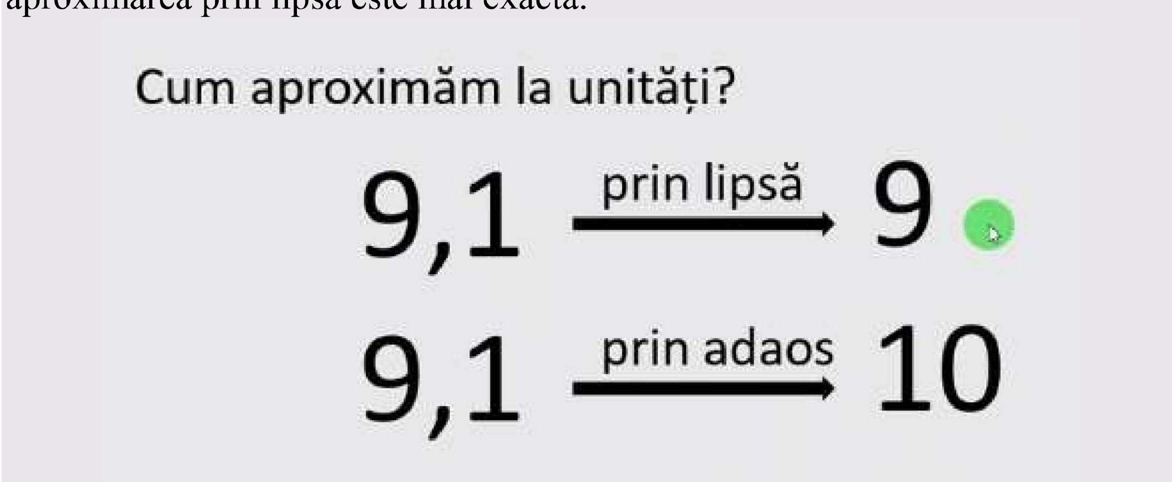
Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

FRACTII ZECIMALE – APROXIMARI LA ORDINUL ZECIMILOR/SUTIMILOR

Sa vedem la ce sunt bune aproximarile si cum le folosim in lumea reala. De exemplu avem un concurs de BMX si ne intrebam cati elevi au participat la concursul de BMX din localitatea ta. Daca intrebam un concurent el ne va spune ca au fost aproximativ 1000. Acesta a facut de fapt o estimare, el nu are de unde sa stie numarul exact de concurenti, dar daca intrebam un parinte, el ne va spune, nu, au fost cam 900, dar intreband un antrenor, el ne va spune ca au fost aproximativ 890, dar daca vrem sa aflam exact, intrebam organizatorul si el ne va spune de pe listele cu concurenti ca sunt exact 893 de elevi. Sa punem aceste raspunsuri intr-o lista: raspunsul concurentului, al parintelui, al antrenorului si al organizatorului. Raspunsul 1000 este aproximativ, la fel si 900, la fel si 890, desi se apropie din ce in ce mai mult de adevar. Dar raspunsul organizatorului, 893, este cel exact. Celelalte trei raspunsuri sunt doar aproximari ale adevarului. Daca ne uitam unde sunt reprezentate aproximarile noastre pe axa numerelor, observam ca 1000 este reprezentat aici, 900 aici, 890 mai la stanga cu 10, iar numarul nostru exact 893 este intre 890 si 900, mai aproape de 890. Observati cum raspunsurile sunt din ce in ce mai apropiate de 893. Uitati-va la 890, vedeti cat de apropiat este de 893? De fapt este cel mai apropiat dintre numerele care au zeci intregi. Spunem ca este cea mai precisa estimare. Facem estimari atunci cand nu avem suficiente date sa evaluam ceva in mod exact si atunci estimam. Iar 1000 este cea mai putin precisa estimare, pentru ca este cea mai indepartata de 893.

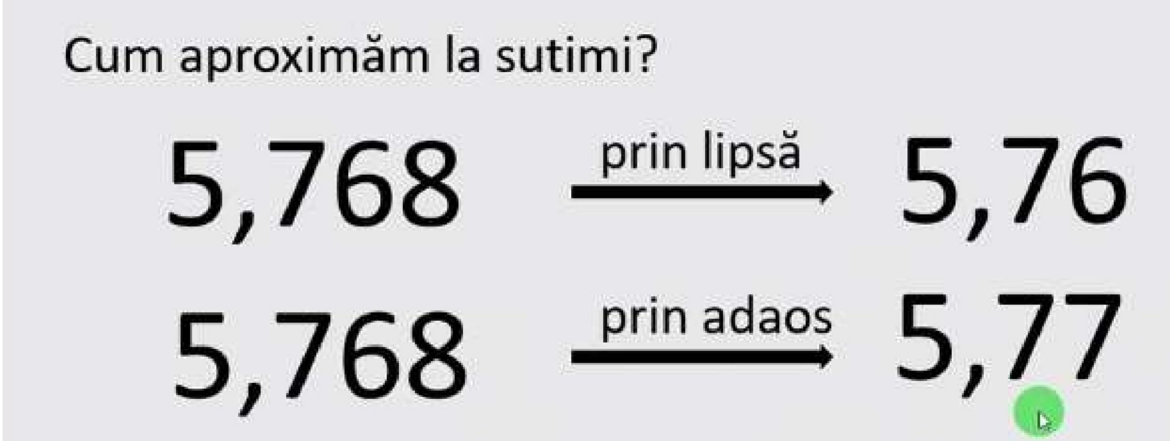


Aproximarea se poate face la unitati, la zeci, la sute, la mii si asa mai departe, dar si la zecimi, sutimi, miimi si asa mai departe. De exemplu, numarul 3,4 care este o fractie zecimala poate fi aproximat la unitati prin lipsa, ignorand zecimalele, ignorand aceste zecimi. Daca ne uitam pe axa numerelor 3,4 este aici, iar aproximat prin lipsa inseamna ca merge catre cea mai apropiata unitate, pentru ca aproximam la unitati, mai mica, mergem catre un numar mai mic, din 3,4 ajungem la 3. Dar 3,4 poate fi aproximat si prin adaos, asta inseamna ca merge catre cea mai apropiata unitate, pentru ca avem unitati aici, mai mare decat numarul nostru, adica merge la 4. Ca sa-l aproximam pe 9,1 la unitati il transformam in 9, tot pe 9,1 daca il aproximam prin adaos, il vom transforma in 10, pentru ca cea mai apropiata unitate mai mare decat 9,1 este 10. In acest caz vedem clar ca 9 este o aproximare mai buna, prin lipsa, deci in acest caz aproximarea prin lipsa este mai exacta.



Acum sa aproximam la zecimi numarul 8,346. Acestea sunt unitatile, iar acestea sunt zecimile. Dorim sa-l aproximam prin lipsa la zecimi si vom forma un numar cu zecimi intregi, adica fara sutimi, fara miimi. Cel mai apropiat numar cu zecimi intregi, mai mic decat acesta este chiar 8,3. Insa la aproximarea prin adaos trebuie sa gasim cel mai mare numar apropiat de 8,346 si acesta este 8,4 sau puteti sa va ganditi la el ca si 8,400, pentru ca aici avem 8,346, oricum aceste doua zerouri nu vor avea nicio valoare.

Dar cum il aproximam pe 5,768 la sutimi? Care sunt sutimile? Acestea sunt unitatile, imediat dupa virgula avem zecimile, apoi sutimile. Ne dorim un numar intreg in sutimi, adica 5,76 daca este aproximare prin lipsa. Am scos aceste miimi si am ramas cu 5,76. Ca sa-l aproximam prin adaos pe 5,768 trebuie sa ajungem la un numar mai mare decat el, ca adaugam, ca sa ajungem la un numar intreg in sutimi si acesta va fi 5,77. Vedeti, aici la 68 am adaugat 2 miimi si am ajuns la 7 sutimi. 68 plus 2 inseamna 70. Puteti sa considerati desigur acest numar ca fiind 5,770.



Aproximarea la zeci a numarului 25,76 prin lipsa ne duce la 20, pentru ca este cea mai apropiata zece intreaga mai mica decat 25,76, dar prin adaos ne duce catre 30, pentru ca 30 este cea mai apropiata zece intreaga, dar mai mare decat 25,76.

o Operatii cu numere rationale: adunarea, scaderea, inmultirea si impartirea fractiilor ordinare; adunarea si scaderea fractiilor zecimale cu un numar finit de zecimale nenule; inmultirea si impartirea fractiilor zecimale cu un numar finit de zecimale nenule

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Multimea numerelor rationale

Definitie

Numim ***multimea numerelor rationale,*** multimea $Q=\left\{\frac{m}{n}|m,n\in Z,n\neq 0\right\}$.

Un element din ***Q*** îl numim numar rational.

Perechile (m,n) le numim fractii si le notam tot prin $\frac{m}{n}$

Avem sirul de incluziuni $N\subset Z\subset Q$**.**

Definiţie.

Numarul întreg n se numeste *numitor* iar numarul întreg m se numete *numărător*. Linia orizontala " - " se numeste *linie de fracţie*.

Dac $m<n$, fractia se numeste *subunitară*. Daca $m>n$ fractia se numeste *supraunitară*. În cazul $m=n$ fractia se numeste *echiunitară*.

Operaţii fundamentale cu fracţii.

Adunarea fractiilor

Fie fractiile $\frac{m}{n}$ si $\frac{p}{q}$. Definim adunarea celor doua fractii ca fiind fractia $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$.

Observatie.

Daca fractiile pe care le adunam au acelasi numitor atunci, din definitia de mai sus, rezulta : $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$.

Pentru a aduna doua fractii, cel mai simplu este sa amplificam / simplificam fractiile pentru a le aduce la acelasi numitor si apoi sa le adunam.

Proprietăţile adunării fracţiilor.

a. Adunarea este comutativa: $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$

b. Adunarea este asociativa: $\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$

c. Existenta elementului neutru: exista $\frac{0}{b}\in Q$ astfel incat $\forall\frac{a}{b}\in Q$ sa avem $\frac{0}{b}+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+\frac{0}{b}=\frac{a}{b}$. Numarul $\frac{0}{b}\in Q$ il consideram, mai simplu 0.

d. Opusul unui numar rational: $\forall\frac{a}{b}\in Q$, $\exists\left(-\frac{a}{b}\right)\in Q$ astfel incat $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$

Inmulirea fractiilor

Fie fractiile $\frac{m}{n}$ si $\frac{p}{q}$. Definim inmultirea celor doua fractii ca fiind fractia $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$.

Proprietăţile inmultiriii fracţiilor.

a. Inmultirea este comutativa: $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}$

b. Inmultirea este asociativa: $\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{r}{s}=\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)$

c. Existenta elementului neutru: exista $\frac{1}{1}\in Q$ astfel incat $\forall\frac{a}{b}\in Q$ sa avem $\frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}$

.

d. Inversul unui numar rational: $\forall\frac{a}{b}\in Q$, $\exists\left(\frac{b}{a}\right)\in Q$ astfel incat $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$

e. Inmultirea este distributiva fata de adunare : $\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}$; $\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n}$.

Impartirea fractiilor

Fie fractia $\frac{m}{n}\in Q$. Fractia $\frac{n}{m}\in Q$ se numeste inversa fractiei $\frac{m}{n}$ ($m,n\in Z^*$).

Fie fractiile $\frac{m}{n}$ si $\frac{p}{q}$. Definim impartirea lui $\frac{m}{n}$ la $\frac{p}{q}$ ca fiind produsul dintre $\frac{m}{n}$ si inversa fractiei $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$$

Exemplu

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{12}{15}$$

Operaţii de grad superior cu numere raţionale.

Ridicarea la putere.

Fie $a\in Q$ si $n\in N^*$. Definim *puterea n a lui a* ca fiind produsul notat $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{de\,n\,ori}$. Se citeste *a la puterea n*.

Proprietăţi

1. $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$, $a>0$;
2. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$, $a>0$;

3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a > 0$;

4. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$, $a > 0$;

5. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$, $a > 0$, $b > 0$;

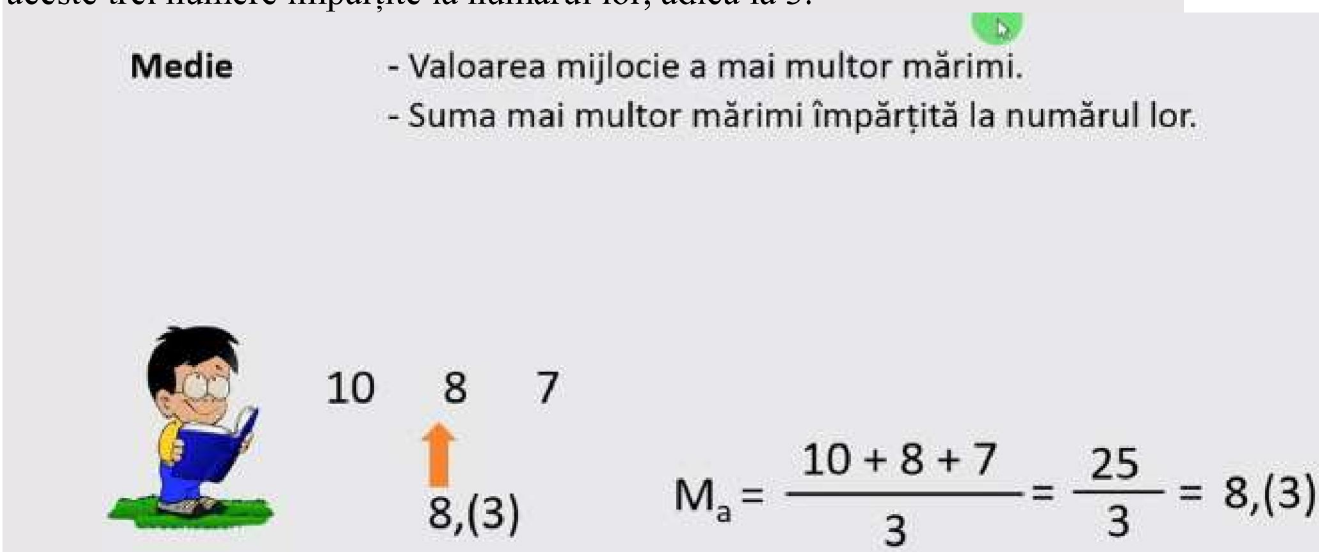
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $a > 0$, $b > 0$.

o Media aritmetica si media ponderata a doua sau mai multe numere rationale

MEDIA ARITMETICĂ PONDERATĂ

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Aveți în imagine câteva greutăți pentru că această medie este o medie cu greutăți, dar nu este foarte grea, o să vedeți imediat. Ce înseamnă medie? Înseamnă valoarea mijlocie a mai multor mărimi, iar media aritmetică suma mai multor mărimi împărțite la numărul lor. De exemplu, dacă un băiețel ia două note: un 10 și un 8, media acestor note este suma acestor mărimi, adică 10 plus 8, împărțite la numărul lor, adică la 2, pentru că sunt două numere. Asta înseamnă 18 pe 2, adică 9. Deci media aritmetică dintre 10 și 8 este 9. Media aritmetică semnifică mijlocul distanței dintre două numere, dacă sunt două numere. Dar dacă avem trei numere? Acum media se calculează ca sumă din aceste trei numere împărțite la numărul lor, adică la 3.

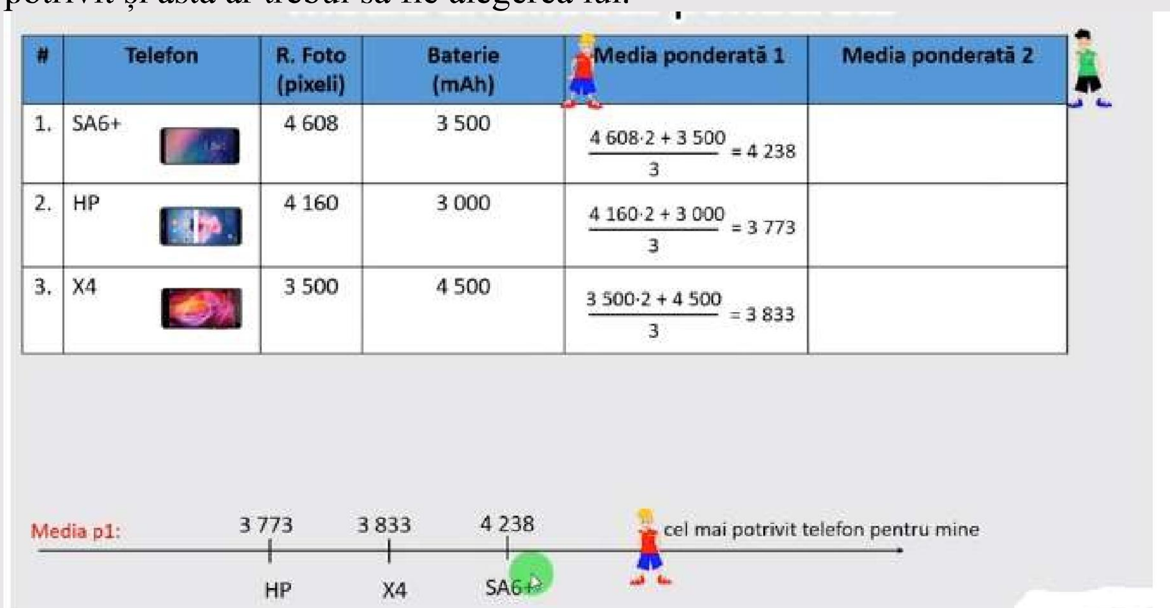


10 plus 8 plus 7 este 25 supra 3, este egal cu 8 virgulă 3 în perioadă. Vedeți cum media aritmetică a acestor numere este ceva mai mare decât 8. Dar să vedem acum ce înseamnă pondere și apoi ce înseamnă media aritmetică ponderată. Dacă ne uităm în dicționar pondere înseamnă greutate specifică sau importanță. Dacă băiețelul s-ar întreba ce notă este mai importantă, evident că toate notele sunt importante, de aceea media aritmetică ponderată nu se aplică la note, dar se aplică la multe alte lucruri. Iată avem alți doi băieți care își doresc câte un telefon mobil, dar nu știu ce să aleagă dintre Samsung Galaxy A6 Plus sau Huawei P Smart sau Xiaomi Redmi Note 4. Aceasta este lista scurtă de

unde trebuie ei să aleagă. Aceste telefoane au aproximativ același preț, tot ce trebuie să facă ei este să îl aleagă pe cel care li se potrivește cel mai bine, adică trebuie să le așeze pe o axă unde în dreapta este cel mai potrivit telefon pentru mine și să le ordoneze în funcție de preferințe și apoi să îl aleagă pe cel cu valoarea cea mai mare. Dar cum facem asta? Un exemplu ar putea fi așa: așezăm Samsung-ul aici, așezăm Huawei-ul aici și Xiaomi aici. Dar pentru o comparare obiectivă trebuie să lucrăm cu numere, trebuie să asociem fiecăruia caracteristici tehnice, apoi să realizăm acest clasament. Iată facem un tabel, așezăm telefoanele Samsung, Huawei și Xiaomi și ne vom referi acum la două caracteristici tehnice foarte importante când vine vorba de telefoane și anume rezoluția camerei foto în pixeli și bateria în miliamperi/oră. Dacă nu știți ce înseamnă miliamperi/oră o să aflați în curând la fizică, este o unitate de măsură a energiei și ne dă o măsură despre cât ține bateria acestui telefon, cât de puternică este bateria pentru a înmagazina și conține energie electrică. Ne uităm pe internet și găsim rezoluția celor trei telefoane: 4608 în cazul acesta, 4160 pentru Huawei și 3500 pentru Xiaomi. Observăm că dacă singurul nostru criteriu ar fi rezoluția camerei foto, atunci clar am alege telefonul Samsung pentru că celelalte două au o rezoluție mai slabă, nu mult mai slabă, dar suficient cât să le deosebim. Dar în joc intră și bateria. Iată Samsung are o baterie de 3500 miliamperi, Huawei are o baterie de 3000 miliamperi, iar Xiaomi de 4500 miliamperi. Iarăși, dacă am compara telefoanele ținând cont doar de baterie, Xiaomi ar fi cel mai bun, apoi Samsung, apoi Huawei. Dar noi dorim să le comparăm ținând cont de ambele caracteristici, deci putem face o medie, nu? Haideți să facem media aritmetică. Încă nu am ajuns la media ponderată, o să vedem unde o să avem nevoie de ea, dar pentru moment facem doar media aritmetică, adică adunăm aceste două numere și le împărțim la 2. Să vedem care telefon iese mai bine din acest calcul. Iată media aritmetică a tuturor telefoanelor, da, 3500 plus 4500. Acum calculăm și ne va da aceste rezultate. Iată că din medie cel mai bine a ieșit Samsung, apoi Xiaomim, apoi Huawemi. Deci dacă este să le așezăm pe o axă a preferințelor atunci le așezăm în funcție de medie, că nu putem să le așezăm pe axă în funcție de două caracteristici, ne trebuie un singur număr și aici ne-a ajutat media: să transformăm din două numere într-un singur număr și acum putem să le ordonam pe axa pentru a-l putea alege pe cel mai bun. Îl așezăm pe Samsung aici cu cea mai mare valoare, apoi pe Xiaomi, apoi pe Huawei. Bun, asta înseamnă că putem alege, Samsung este cel mai bun.

#	Telefon	R. Foto (pixeli)	Baterie (mAh)	Media
1.	SA6	4 608	3 500	$\frac{4\,608+3\,500}{2} = 4\,054$
2.	HP	4 160	3 000	$\frac{4\,160+3\,000}{2} = 3\,580$
3.	X4	3 500	4 500	$\frac{3\,500+4\,500}{2} = 4\,000$

Ia să vedem băieții noștri sunt mulțumiți? Acesta ne spune: pentru mine e de două ori mai importantă camera foto. Bravo! Samsung are cea mai bună cameră foto. Deci acesta este telefonul ideal pentru tine. Ia să vedem și caracteristicile camerelor foto 4160 de pixeli, 3500 pixeli, 4608 pixeli. Într-adevăr Samsung este cel mai bun pentru tine și iată matematica, adică media aritmetică ne-a arătat acest lucru. Dar acest băiețel ne va spune: pentru mine e de trei ori mai importantă bateria. Nu știm de ce, poate merge mult cu autobuzul și i se descarcă telefonul, dar important este că acestui băiat îi plac telefoanele cu bateria puternică, iar Samsung nu este telefonul cu cea mai puternică baterie, pentru că dacă ne uităm la caracteristici are doar 3500 de miliamperi, Xiaomi ar fi o alegere mai bună. Iată că aici media aritmetică nu ne-a ajutat. Puteți spune, de ce nu-l alege direct pe acesta, ce ne mai complicăm cu media aritmetică? Pentru că pentru acest băiat este de trei ori mai importantă bateria. Dar nu a spus că nu e importantă camera foto, vrea să își ia un telefon cu care poate să facă poze, evident. Oare Xiaomi se încadrează în acest criteriu? Nu cumva Samsung este mai bun pentru că are și baterie relativ puternică, dar și cameră? Cum măsurăm că este de trei ori mai importantă bateria? Apelăm evident la media aritmetică ponderată, numai că trebuie să o învățăm înainte. Și sperăm că acest telefon o să iasă primul atunci când punem criteriul că bateria este de trei ori mai importantă. Vedeți, media aritmetică ponderată de fapt ne spune ce valoare este mai importantă pentru a alege telefonul: camera foto sau bateria. Din cauză că băieții au preferințe diferite o să trebuiască să calculăm două medii aritmetice ponderate, una pentru băiețelul din stânga și alta pentru băiețelul din dreapta, ca să îi mulțumim pe amândoi. Iată cum facem, luăm telefoanele și facem un tabel asemănător cu tabelul de dinainte. Doar că o să calculăm două medii, în prima medie spunem că rezoluția foto, numărul de pixeli este de două ori mai important decât bateria. Cum scriem acest lucru? Media este asemănătoare doar că pe numărul care este mai important îl înmulțim cu 2, iar la numitor trebuie să punem 3, pentru că sunt doi aici și unul aici, două numere aici, un număr aici, în total avem trei numere și iată am făcut un fel de medie aritmetică, se numește medie aritmetică ponderată, pentru că am ponderat această valoare, am făcut-o mai importantă, înmulțind-o cu 2. La fel și pentru Huawei, la fel și pentru Xiaomi. Acum calculăm și observăm că Samsung are cea mai mare valoare. Este normal pentru că Samsung are cea mai mare rezoluție, dar atenție, are și bateria bună, pentru că dacă bateria ar fi fost foarte slabă poate nu ieșea el, contează totuși și bateria, chiar dacă rezoluția contează de două ori mai mult. Deci care este cel mai potrivit telefon pentru acest băiat? Le așezăm pe toate ordonate și observăm că Samsung este cel mai potrivit și asta ar trebui să fie alegerea lui.



#	Telefon	R. Foto (pixeli)	Baterie (mAh)	Media ponderată 1	Media ponderată 2
1.	SA6+	4 608	3 500	$\frac{4\,608\cdot 2+3\,500}{3}=4\,238$	
2.	HP	4 160	3 000	$\frac{4\,160\cdot 2+3\,000}{3}=3\,773$	
3.	X4	3 500	4 500	$\frac{3\,500\cdot 2+4\,500}{3}=3\,833$	

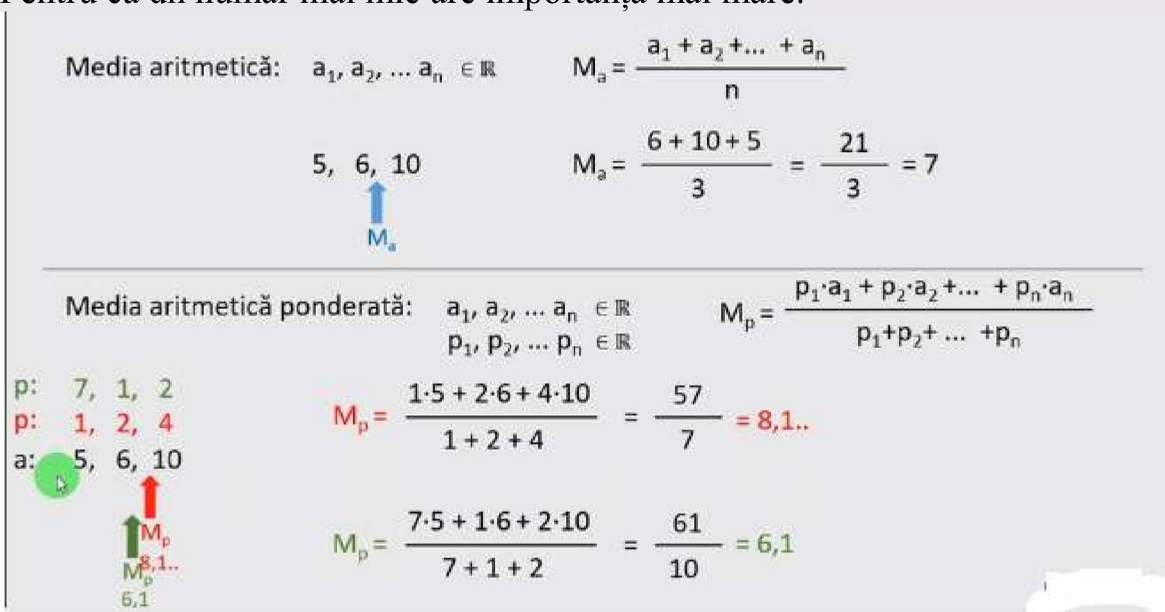
Haideți să trecem la a doua coloană, să facem alegerea și pentru celălalt băiat. De data aceasta 4608 nu mai este așa important, deși are importanța lui, contează să aibă o cameră foto bună, dar nu este cel mai important criteriu. Deci îl scriem pe 4608, îl adunăm cu 3500, dar de data aceasta îl înmulțim cu 3, pentru că este de trei ori mai important, deci îl ponderăm cu trei. În total câte numere ar fi? 1 aici și încă trei aici, 4. Considerați că acest număr este înmulțit cu 1. 1 plus 3 este 4. Mergem mai departe, procedăm în același fel, apoi le calculăm și ce observăm? Că telefonul Xiaomi este cel mai potrivit pentru că are bateria foarte bună și totuși camera nu este chiar așa de slabă. Iată acum ordonarea este diferită dacă am modificat ponderile, aici avem 2, aici avem 3, s-a modificat și ordinea pe această axă. Deci băiatul nostru cu siguranță va fi încântat de telefonul produs de Xiaomi.

#	Telefon	R. Foto (pixeli)	Baterie (mAh)	Media ponderată 1	Media ponderată 2
1.	SA6+	4 608	3 500	$\frac{4\,608 \cdot 2 + 3\,500}{3} = 4\,238$	$\frac{4\,608 + 3\,500 \cdot 3}{4} = 3\,777$
2.	HP	4 160	3 000	$\frac{4\,160 \cdot 2 + 3\,000}{3} = 3\,773$	$\frac{4\,160 + 3\,000 \cdot 3}{4} = 3\,290$
3.	X4	3 500	4 500	$\frac{3\,500 \cdot 2 + 4\,500}{3} = 3\,833$	$\frac{3\,500 + 4\,500 \cdot 3}{4} = 4\,250$

Iată doar una din utilizările mediei aritmetice ponderate. Vă mai spun doar că de câte ori mergeți la un magazin virtual, pe internet și vi se fac recomandări să știți că toate aceste recomandări sunt calculate cu ajutorul mediilor ponderate în funcție de ceea ce preferă mai mult un anumit client sau altul.

Să revedem puțin cum se calculează media aritmetică. Dacă avem câteva numere a_1, a_2, a_n, numere reale, media aritmetică este suma acestor numere a_1 plus a_2 plus și așa mai departe până la a_n împărțită sau supra numărul lor. De exemplu dacă avem 5, 6 și 10 atunci media aritmetică a acestor numere este 5 plus 6 plus 10 împărțită la 3, pentru că sunt 3 numere. Mai departe este egal cu 6 plus 5 este 11, 21 supra 3, care este egal cu 7. Deci media aritmetică este undeva în mijlocul grupului de numere dacă le ordonam pe axă, dacă sunt doar două numere, atunci este exact la mijlocul distanței dintre ele. Dar să vedem acum media aritmetică ponderată cum se calculează. Dacă avem mai multe numere reale a_1, a_2, a_n și așa mai departe și mai avem un set de greutăți sau de ponderi sau de parametri cum vreți să le spuneți, un alt set de numere, tot numere reale, atunci media aritmetică ponderată pe care adesea o notăm cu M_p este egală cu suma dintre numerele noastre înmulțite corespunzător cu fiecare parametru din acesta, cu fiecare pondere a_1 cu p_1, a_2 cu p_2 și așa mai departe până la a_n cu p_n, împărțită la suma acestor numere, adică p_1 plus p_2 plus și așa mai departe p_n. Aceasta este formula mediei aritmetice ponderate. Un caz particular este acela în care toate p-urile sunt egale cu 1, caz în care avem media aritmetică pe care am învățat-o înainte, pentru că înmulțirea cu 1 lasă numărul neschimbat, iar aici dacă avem 1 plus 1 plus 1 este numărul de parametri, adică numărul de numere. Să facem și un exemplu, dacă avem 5, 6 și 10, cum calculăm media aritmetică ponderată dacă ponderile sunt 1, 2, respectiv 4. Deci media aritmetică ponderată este 1 ori 5 plus 2 ori 6 plus 4 ori

10, da, înmulțim fiecare parametru cu numărul corespunzător supra suma parametrilor, adică 1 plus 2 plus 4, ceea ce ne va da 57 sus supra 7 jos, adică 8,1 și alte câteva zecimale. Deci media ponderată a apărut aici, 8,1, între 6 și 10. În condițiile în care media aritmetică a apărut la 7. Oare de ce a apărut media ponderată mai la dreapta? De ce este un număr mai mare? Pentru că 10, cel mai mare număr din această mulțime, are ponderea cea mai mare, este cel mai important. Dar dacă modificăm ponderile și dăm importanță mai mare lui 5, haideți să calculăm, media ponderată va fi 7 ori 5 plus 1 ori 6 plus 2 ori 10 supra 7 plus 1 plus 2. Numărătorul este egal cu 61, iar la numitor avem 7 plus 1 plus 2 adică 10, ceea ce ne dă 6,1 ca și medie ponderată, pe care o așezăm undeva aici, imediat după 6. Vedem că media este mai mică de data aceasta. De ce? Pentru că un număr mai mic are importanță mai mare.



Numere iraționale Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

*Mulţimea numerelor iraţionale (notată cu **I**=**R****Q**:*

Definiţie. Numim număr iraţional (pozitiv sau negativ) un număr care poate fi reprezentat cu ajutorul unui număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, care nu se succed periodic.

Exemple: 2 =1,4142…; 3 =1,73...; π =3,1415926…

o Reguli de calcul cu radicali: produs, cat, scoaterea factorilor de sub radical, introducerea factorilor sub radical

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Reguli de calcul cu radicali

Radicalul unui produs

Radicalul unui produs de numere raţionale pozitive **este egal cu produsul radicalilor** numerelor raţionale respective.

$\sqrt{\boxed{a \cdot b}} = \sqrt{\boxed{a}} \cdot \sqrt{\boxed{b}}$, oricare ar fi a, b $\in Q_+$

Radicalul câtului

Radicalul câtului a două numere raţionale pozitive **este egal cu câtul radicalilor** celor două numere raţionale.

$\sqrt{\boxed{a/b}} = \sqrt{\boxed{a}} / \sqrt{\boxed{b}}$, oricare ar fi a $\in Q_+$ şi b $\in Q_+$

Introducerea factorilor sub radical

În egalitatea $a\sqrt{\boxed{b}} = \sqrt{\boxed{a^2 \cdot b}}$, a,b ≥ 0

spunem că factorul **a** al produsului $a\sqrt{\boxed{b}}$ a fost **introdus sub radicalul** $\sqrt{\boxed{a^2 \cdot b}}$.

Scoaterea factorilor de sub radical

În egalitatea $\sqrt{\boxed{a^2 \cdot b}} = a\sqrt{\boxed{b}}$, a,b ≥ 0

spunem că factorul a^2 a fost **scos de sub radicalul** $\sqrt{\boxed{a^2 \cdot b}}$.

Reguli de calcul cu radicali

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\frac{a\sqrt{m}}{b\sqrt{n}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}$$

o Operatii cu numere irationale (adunarea, scaderea, inmultirea, impartirea numerelor irationale care contin radicali de ordin 2)

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Operaţii cu numere reale de forma $a\sqrt{b}$

Adunarea radicalilor

Adunarea numerelor $a\sqrt{d}$ şi $b\sqrt{d}$, $d > 0$

se face după regula: $\mathbf{a\sqrt{d} + b\sqrt{d} = (a+b)\sqrt{d}}$.

Scăderea radicalilor

Scăderea numerelor $a\sqrt{d}$ şi $b\sqrt{d}$, $d > 0$

se face după regula: $\mathbf{a\sqrt{d} - b\sqrt{d} = (a-b)\sqrt{d}}$.

Înmulţirea radicalilor

Înmulţirea numerelor $a\sqrt{m}$, $m > 0$ şi $b\sqrt{n}$, $n > 0$

se face după regula: $\mathbf{a\sqrt{m} \cdot b\sqrt{n} = (a \cdot b)\sqrt{m \cdot n}}$.

Împărţirea radicalilor

Împărţirea numărului $a\sqrt{m}$, $m > 0$, la numărul $b\sqrt{n}$, $n > 0$, $b \neq 0$

se efectuează după regula: $a\sqrt{m} : b\sqrt{n} = (a:b)\sqrt{m:n}$.

sau $a\sqrt{m} / b\sqrt{n} = a/b \cdot \sqrt{m/n}$.

Ridicarea la putere a radicalilor

A ridica la puterea **n** numărul real $a\sqrt{b}$, $b > 0$

înseamnă a efectua produsul a **n** factori egali cu $a\sqrt{b}$.

Deci: $(a\sqrt{b})^n = (a\sqrt{b}) \cdot (a\sqrt{b}) \cdot \ldots \cdot (a\sqrt{b}) = a^n\sqrt{b^n}$.

o Radacina patrata a unui numar natural patrat perfect

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

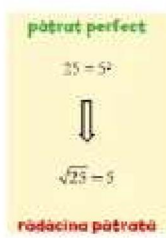
Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Definiție: Fie $x \in \mathbb{N}$, pătrat perfect. Se numește **rădăcina pătrată** a numărului x numărul natural n cu proprietatea $x = n^2$.
Vom scrie $\sqrt{x} = n$ și vom citi „***radical din x este egal cu n***".
Numărul natural n se mai numește și **„radicalul de ordin 2 al numărului x"**.
Operația prin care unui pătrat perfect $x \in \mathbb{N}$ i se asociază un număr $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $x = n^2$ se numește **operația de extragere a rădăcinii pătrate** sau **operația de extragere a radicalului.**

Concluzie:

$\sqrt{x} = n \Rightarrow x = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$

Prin urmare, $\sqrt{n^2} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.



Exemple:

1. $\sqrt{25} = 5$
2. $\sqrt{81} = 9$
3. $\sqrt{0} = 0$
4. $\sqrt{17^2} = 17$
5. $\sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3 = 125$
6. $\sqrt{2^{2020}} = \sqrt{(2^{1010})^2} = 2^{1010}$

Au loc relațiile:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, pătrate perfecte.

b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

c) $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$, $x, y \in \mathbb{N}$ pătrate perfecte, respectiv $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

Exemple:

1. $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}=5\cdot 2=10$, $\sqrt{25\cdot 4}=\sqrt{100}=10$, deci $\sqrt{25}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{25\cdot 4}$
2. $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$, $\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}=3$, deci $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}}=\sqrt{\frac{225}{25}}$
3. $\sqrt{1600}=\sqrt{16\cdot 100}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}=40$
4. $\sqrt{\frac{1600}{49}}=\frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}}=\frac{40}{7}$

Obs.

1. $\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$, pentru orice numere raționale pozitive.
2. $\sqrt{x-y}\neq\sqrt{x}-\sqrt{y}$, pentru orice numere raționale pozitive, $x>y$.

Exercitii propuse:

1. Efectuați după model:

a) $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$

$\sqrt{81}; \sqrt{100}; \sqrt{484}; \sqrt{576};$

b) $\sqrt{1600}=\sqrt{16\cdot 100}=\sqrt{4^2\cdot 10^2}=\sqrt{(4\cdot 10)^2}=\sqrt{40^2}=40$

$\sqrt{8100}; \sqrt{6400}; \sqrt{900}; \sqrt{14400};$

- Rădăcina Pătrată:

  Fie "a" un număr natural pătrat perfect. Numărul natural "n" cu proprietatea: $n^2=a$ se numeşte rădăcină pătrată a numărului "a" şi se notează: $n=\sqrt{a}$

- Exemple: $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$
- $\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$
- $\sqrt{0}=\sqrt{0^2}=0$

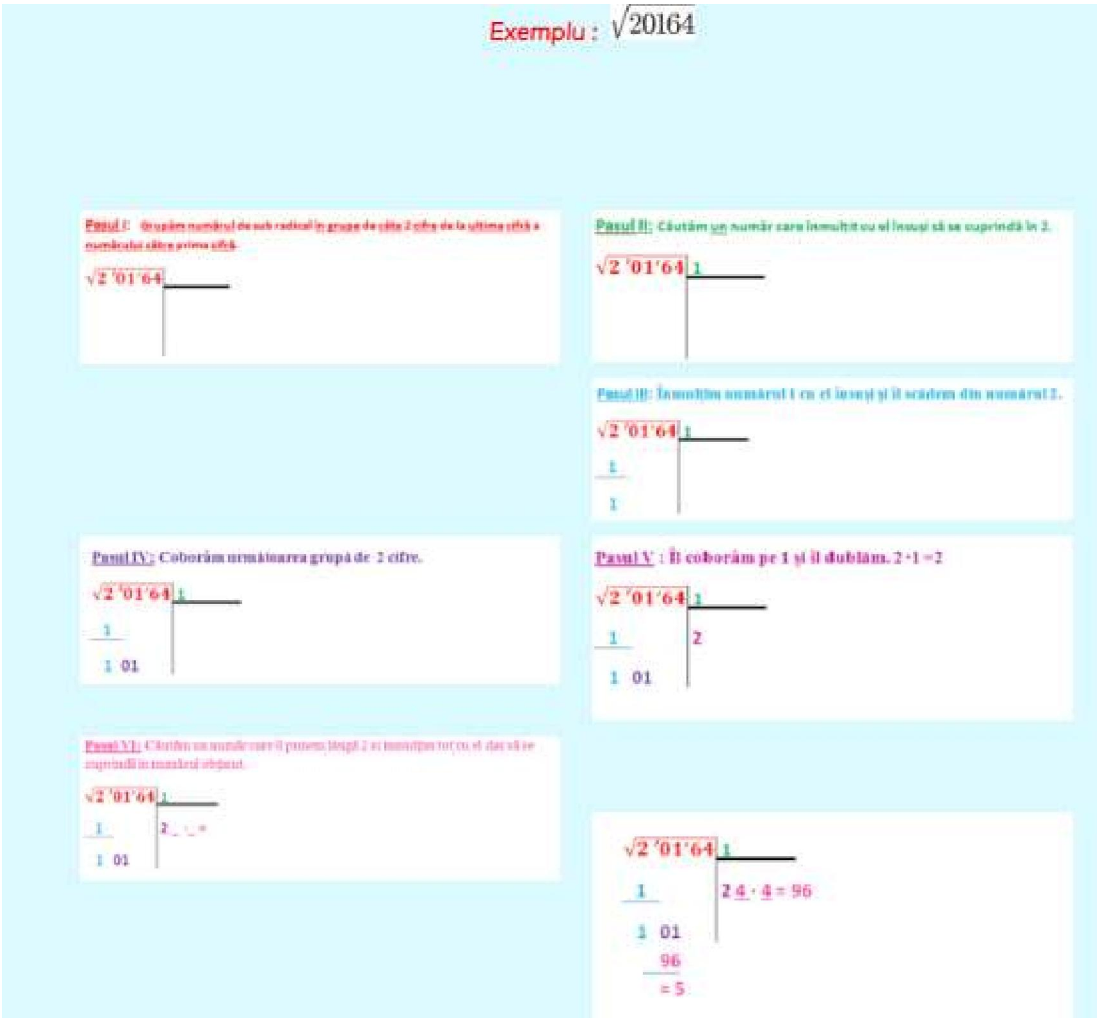
Observaţie: Evident numai unul este număr natural : $\sqrt{n}=n$

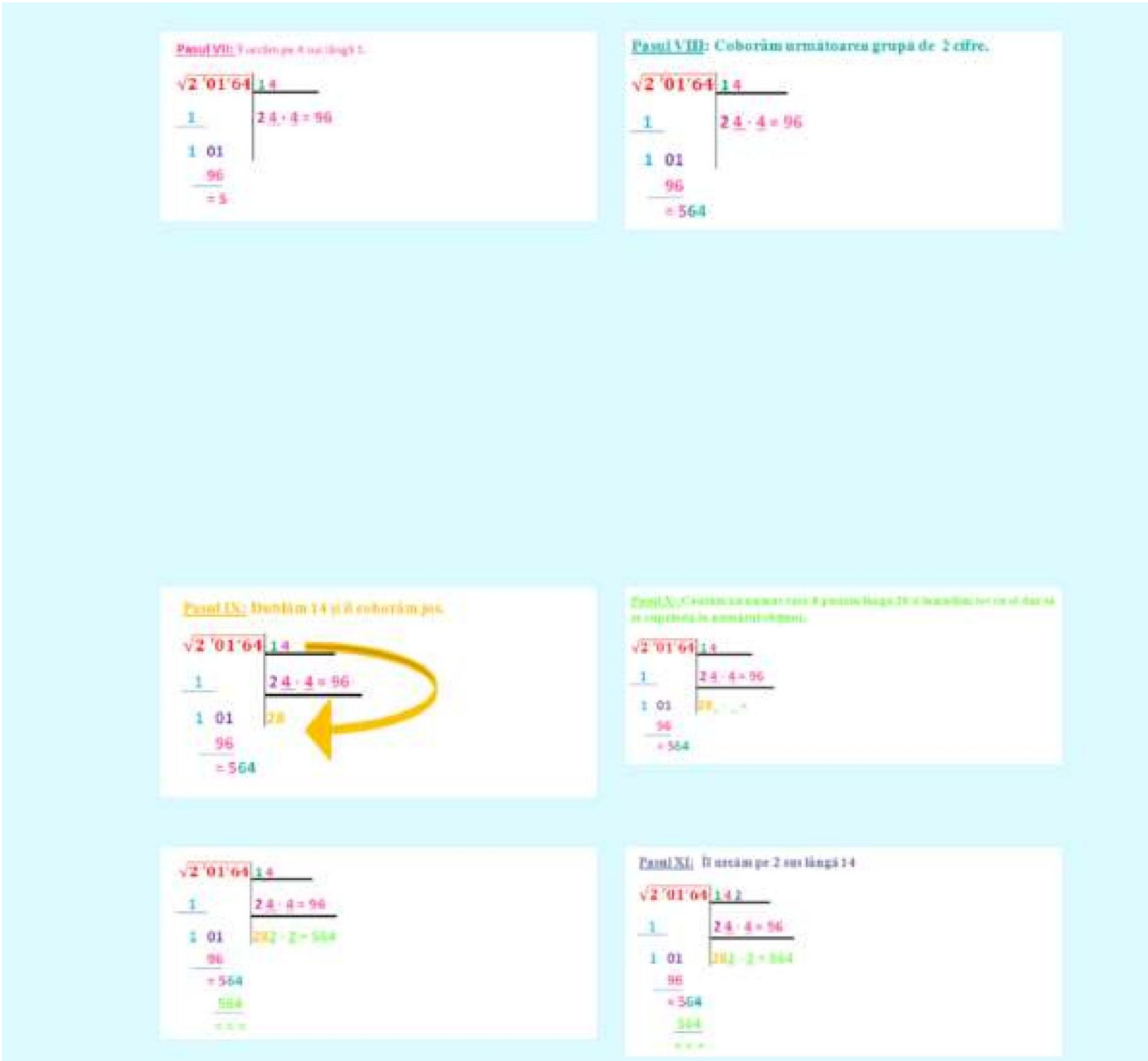
EXEMPLU:

$\sqrt{25\cdot a^4\cdot b^2}=\sqrt{(5\cdot a^2\cdot b)^2}=|5\cdot a^2\cdot b|=5\cdot a^2\cdot|b|$

o Algoritmul de extragere a radacinii patrate a unui numar natural prin descompunerea numerelor in produs de factori primi

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia





Extragerea rădăcinilor din numere fracționale

Este timpul să ne dăm seama cum este extrasă rădăcina dintr-un număr fracționar. Să se scrie numărul rădăcinii fracționare ca p/q . Conform proprietății rădăcinii coeficientului, următoarea egalitate este adevărată. Din această egalitate rezultă **regula rădăcinii fracțiunii**: Rădăcina unei fracții este egală cu câtul împărțirii rădăcinii numărătorului la rădăcina numitorului.

Să ne uităm la un exemplu de extragere a unei rădăcini dintr-o fracție.

Exemplu.

Care este rădăcina pătrată a fracției comune 25/169.

Decizie.

Conform tabelului cu pătrate, aflăm că rădăcina pătrată a numărătorului fracției inițiale este 5, iar rădăcina pătrată a numitorului este 13. Apoi $\sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}} = \frac{5}{13}$. Aceasta completează extragerea rădăcinii dintr-o fracție obișnuită 25/169.

Răspuns:

Rădăcina unei fracții zecimale sau a unui număr mixt este extrasă după înlocuirea numerelor rădăcinii cu fracții obișnuite.

Exemplu.

Luați rădăcina cubă a zecimalei 474,552.

Decizie.

Să reprezentăm zecimala inițială ca o fracție comună: 474,552=474552/1000 . Apoi $\sqrt[3]{474{,}552} = \sqrt[3]{\frac{474552}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{474552}}{\sqrt[3]{1000}}$. Rămâne să extragem rădăcinile cubice care se află la numărătorul și numitorul fracției rezultate. La fel de 474 552=2 2 2 3 3 3 13 13 13=(2 3 13) 3 =78 3 și 1 000=10 3 , atunci $\sqrt[3]{474552} = \sqrt[3]{78^3} = 78$ și $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$.

Rămâne doar să finalizați calculele $\frac{\sqrt[3]{474552}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{78}{10} = 7{,}8$.

Răspuns:

$\sqrt[3]{474,552} = 7,8$.

Extragerea rădăcinii unui număr negativ

Separat, merită să ne gândim la extragerea rădăcinilor din numerele negative. Când studiem rădăcinile, am spus că atunci când exponentul rădăcinii este un număr impar, atunci un număr negativ poate fi sub semnul rădăcinii. Am dat astfel de notații următorul sens: pentru un număr negativ −a și un exponent impar al rădăcinii 2 n−1, avem $\sqrt[2\cdot n-1]{-a} = -\sqrt[2\cdot n-1]{a}$. Această egalitate dă **regula pentru extragerea rădăcinilor impare din numerele negative**: pentru a extrage rădăcina dintr-un număr negativ, trebuie să extrageți rădăcina din numărul pozitiv opus și să puneți semnul minus în fața rezultatului.

Să luăm în considerare un exemplu de soluție.

Exemplu.

Găsiți valoarea rădăcină.

Decizie.

Să transformăm expresia originală astfel încât un număr pozitiv să apară sub semnul rădăcinii: $\sqrt[5]{-12\frac{209}{243}} = -\sqrt[5]{12\frac{209}{243}}$. Acum înlocuim numărul mixt cu o fracție obișnuită: $-\sqrt[5]{12\frac{209}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{3125}{243}}$. Aplicam regula extragerii radacinii dintr-o fractiune obisnuita:

$-\sqrt[5]{\dfrac{3125}{243}} = -\dfrac{\sqrt[5]{3125}}{\sqrt[5]{243}}$. Rămâne de calculat rădăcinile în numărătorul și numitorul fracției rezultate: $-\dfrac{\sqrt[5]{3125}}{\sqrt[5]{243}} = -\dfrac{\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{3^5}} = -\dfrac{5}{3} = -1\dfrac{2}{3}$.

Iată un rezumat al soluției:

$$\sqrt[5]{-12\frac{209}{243}} = -\sqrt[5]{12\frac{209}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{3125}{243}} =$$
$$= -\frac{\sqrt[5]{3125}}{\sqrt[5]{243}} = -\frac{\sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{3^5}} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}.$$

Răspuns:

$$\sqrt[5]{-12\frac{209}{243}} = -1\frac{2}{3}.$$

Găsirea valorii rădăcină pe biți

În cazul general, sub rădăcină există un număr care, folosind tehnicile discutate mai sus, nu poate fi reprezentat ca puterea a n-a a vreunui număr. Dar, în același timp, este nevoie să cunoaștem valoarea unei rădăcini date, cel puțin până la un anumit semn. În acest caz, pentru a extrage rădăcina, puteți utiliza un algoritm care vă permite să obțineți în mod constant un număr suficient de valori ale cifrelor numărului dorit.

Primul pas al acestui algoritm este de a afla care este bitul cel mai semnificativ al valorii rădăcină. Pentru a face acest lucru, numerele 0, 10, 100, ... sunt ridicate succesiv la puterea n până când se obține un număr care depășește numărul rădăcinii. Apoi, numărul pe care l-am ridicat la puterea lui n în pasul anterior va indica ordinea superioară corespunzătoare.

De exemplu, luați în considerare acest pas al algoritmului atunci când extrageți rădăcina pătrată a lui cinci. Luăm numerele 0, 10, 100, ... și le pătram până obținem un număr mai mare decât 5 . Avem 0 2 =0<5 , 10 2 =100>5 , ceea ce înseamnă că cea mai semnificativă cifră va fi cifra unităților. Valoarea acestui bit, precum și a celor mai mici, vor fi găsite în următorii pași ai algoritmului de extracție a rădăcinii.

Toți următorii pași ai algoritmului vizează rafinarea succesivă a valorii rădăcinii datorită faptului că se găsesc valorile următoarelor cifre ale valorii dorite a rădăcinii, începând de la cea mai mare și trecând la cea mai mică. . De exemplu, valoarea rădăcinii din primul pas este 2 , în al doilea - 2,2 , în al treilea - 2,23 și așa mai departe 2,236067977 ... . Să descriem cum sunt găsite valorile biților.

Găsirea biților se realizează prin enumerarea valorilor lor posibile 0, 1, 2, ..., 9 . În acest caz, puterile a n-a ale numerelor corespunzătoare sunt calculate în paralel și sunt comparate cu numărul rădăcină. Dacă la un moment dat valoarea gradului depășește numărul radical, atunci valoarea cifrei corespunzătoare valorii anterioare este considerată găsită și se face trecerea la pasul următor al algoritmului de extracție a rădăcinii, dacă acest lucru nu se întâmplă, atunci valoarea acestei cifre este 9 .

Să explicăm toate aceste puncte folosind același exemplu de extragere a rădăcinii pătrate a lui cinci.

Mai întâi, găsiți valoarea cifrei unităților. Vom itera peste valorile 0, 1, 2, ..., 9 , calculând respectiv 0 2 , 1 2 , ..., 9 2 până când obținem o valoare mai mare decât radicalul 5 . Toate aceste calcule sunt prezentate convenabil sub forma unui tabel:

Возможное значение корня	0	1	2	3
Это значение в степени	0	1	4	9

Deci valoarea cifrei unităților este 2 (deoarece 2 2<5 , a 2 3 >5). Să trecem la găsirea valorii locului zece. În acest caz, vom pătrat numerele 2.0, 2.1, 2.2, ..., 2.9, comparând valorile obținute cu numărul rădăcină 5:

Возможное значение корня	2,0	2,1	2,2	2,3
Это значение в степени	4	4,41	4.84	5,29

Din 2.2 2<5 , a 2,3 2 >5 , atunci valoarea locului al zecelea este 2 . Puteți trece la găsirea valorii locului sutimilor:

Возможное значение корня	2,20	2,21	2,22	2,23	2,24
Это значение в степени	4,84	4,8841	4,8294	4,9729	5,0176

Deci următoarea valoare a rădăcinii lui cinci este găsită, este egală cu 2,23. Și astfel puteți continua să găsiți valori în continuare: 2,236, 2,2360, 2,23606, 2,236067, ...

Pentru a consolida materialul, vom analiza extragerea rădăcinii cu o precizie de sutimi folosind algoritmul considerat.

În primul rând, definim cifra senior. Pentru a face acest lucru, cubăm numerele 0, 10, 100 etc. până când obținem un număr mai mare de 2.151,186 . Avem 0 3 =0<2 151,186 , 10 3 =1 000<2151,186 , 100 3 =1 000 000>2 151.186 , deci cea mai semnificativă cifră este cifra zecilor.

Să-i definim valoarea.

Возможное значение корня	0	10	20
Это значение в степени	0	1 000	8 000

Din 10 3<2 151,186 , a 20 3 >2.151,186 , atunci valoarea cifrei zecilor este 1 . Să trecem la unități.

Возможное значение корня	10	11	12	13
Это значение в степени	1 000	1 331	1 728	2 197

Astfel, valoarea locului celor este 2 . Să trecem la zece.

Возможное значение корня	12,0	12,1	12,2	12,3	12,4
Это значение в степени	1728	1771,561	1815,848	1860,867	1906,624

Возможное значение корня	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9
Это значение в степени	1953,125	2000,376	2048,383	2097,152	2146,689

Deoarece chiar și 12,9 3 este mai mic decât numărul radical 2 151,186 , valoarea locului al zecelea este 9 . Rămâne de efectuat ultimul pas al algoritmului, ne va oferi valoarea rădăcinii cu precizia necesară.

Возможное значение корня	12,90	12,91
Это значение в степени	2146,689	2151,685171

În această etapă, valoarea rădăcinii este găsită până la sutimi:

$$\sqrt[3]{2151,186} \approx 12,90$$

.

În încheierea acestui articol, aș dori să spun că există multe alte modalități de a extrage rădăcini. Dar pentru majoritatea sarcinilor, cele pe care le-am studiat mai sus sunt suficiente.

Formule de rădăcină, proprietățile rădăcinilor pătrate.

Formule rădăcină, proprietăți rădăcină și reguli pentru acțiunile cu rădăcini- în esență este același lucru. Există surprinzător de puține formule pentru rădăcini pătrate. Ceea ce, desigur, mulțumește! Mai degrabă, puteți scrie o mulțime de tot felul de formule, dar doar trei sunt suficiente pentru o muncă practică și sigură cu rădăcini. Orice altceva decurge din acești trei. Deși mulți se rătăcesc în cele trei formule ale rădăcinilor, da...

Să începem cu cel mai simplu. Iat-o:

Cum să găsești rădăcina unui număr - 1 cale

- Una dintre metode este factorizarea numărului care se află sub rădăcină. Aceste componente, ca rezultat al înmulțirii, formează o valoare rădăcină. Precizia rezultatului obținut depinde de numărul de sub rădăcină.
- De exemplu, dacă luați numărul 1.600 și începeți să-l factorizați, atunci raționamentul va fi construit după cum urmează: acest număr este un multiplu al 100, ceea ce înseamnă că poate fi împărțit la 25; deoarece este extrasă rădăcina numărului 25, numărul este pătrat și potrivit pentru calcule ulterioare; la împărțire, obținem un alt număr - 64. Acest număr este și el pătrat, deci se extrage bine rădăcina; după aceste calcule, sub rădăcină, puteți scrie numărul 1600 ca produs de 25 și 64.

- Una dintre regulile pentru extragerea unei rădăcini spune că rădăcina produsului de factori este egală cu numărul care rezultă din înmulțirea rădăcinilor fiecărui factor. Aceasta înseamnă că: $\sqrt{(25*64)} = \sqrt{25} * \sqrt{64}$. Dacă extragem rădăcinile din 25 și 64, obținem următoarea expresie: $5 * 8 = 40$. Adică rădăcina pătrată a numărului 1600 este 40.

- Dar se întâmplă ca numărul de sub rădăcină să nu se descompună în doi factori, din care se extrage întreaga rădăcină. De obicei, acest lucru se poate face doar pentru unul dintre multiplicatori. Prin urmare, cel mai adesea este imposibil să găsiți un răspuns absolut exact într-o astfel de ecuație.
- În acest caz, poate fi calculată doar o valoare aproximativă. Prin urmare, trebuie să luați rădăcina factorului, care este un număr pătrat. Această valoare este apoi înmulțită cu rădăcina celui de-al doilea număr, care nu este termenul pătrat al ecuației.
- Așa arată, de exemplu, numărul 320. Acesta poate fi descompus în 64 și 5. Puteți extrage întreaga rădăcină din 64, dar nu din 5. Prin urmare, expresia va arăta astfel: $\sqrt{320} = \sqrt{(64*5)} = \sqrt{64}*\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$.
- Dacă este necesar, puteți găsi o valoare aproximativă a acestui rezultat prin calcul
  $\sqrt{5} \approx 2,236$, prin urmare, $\sqrt{320} = 8 * 2,236 = 17,88 \approx 18$.
- De asemenea, numărul de sub rădăcină poate fi descompus în mai mulți factori primi, iar aceiași pot fi scoși de sub el. Exemplu: $\sqrt{75} = \sqrt{(5*5*3)} = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \approx 9$.

Cum să găsești rădăcina unui număr - 2 moduri

- O altă modalitate este de a împărți într-o coloană. Împărțirea este similară, dar trebuie să cauți doar numere pătrate, din care apoi extragi rădăcina.
- În acest caz, scriem numărul pătrat deasupra și îl scadem în partea stângă, iar rădăcina extrasă în partea de jos.
- Acum a doua valoare trebuie dublată și scrisă din dreapta jos sub forma: număr_x_=. Golurile trebuie completate cu un număr care va fi mai mic sau egal cu valoarea necesară din stânga - la fel ca în diviziunea normală.
- Dacă este necesar, acest rezultat este din nou scăzut din stânga. Astfel de calcule continuă până când se ajunge la rezultat. Pot fi adăugate zerouri până când obțineți numărul dorit de zecimale.

La prima vedere, poate părea că procedura de factorizare a rădăcinii pătrate în factori este complexă și inexpugnabilă. Dar nu este. În acest articol, vă vom arăta cum să abordați rădăcina pătrată și factorii și cum să extindeți ușor și simplu rădăcina pătrată folosind două metode dovedite.

Factorizarea rădăcinii

Pentru început, definim scopul procedurii de factorizare a rădăcinii pătrate în factori. **Ţintă**- simplificați rădăcina pătrată și scrieți-o într-o formă convenabilă pentru calcule.

Definiția 1

Descompunerea unei rădăcini pătrate în factori - găsirea a două sau mai multe numere care, înmulțite între ele, vor da un număr egal cu cel inițial. De exemplu: 4×4 = 16.

Dacă puteți găsi factorii, puteți simplifica sau elimina cu ușurință expresia rădăcinii pătrate:

Exemplul 1

Împărțiți numărul rădăcinii la 2 dacă este par.

Numărul rădăcină ar trebui să fie întotdeauna împărțit la numere prime, deoarece orice valoare a unui număr prim poate fi factorizată în factori primi. Dacă aveți un număr impar, atunci încercați să-l împărțiți la 3. Nu este divizibil cu 3? Împărțiți în continuare la 5, 7, 9 etc.

Scrieți expresia ca rădăcină a produsului a două numere.

De exemplu, puteți simplifica 98 în acest fel: = 98 ÷ 2 = 49 . De aici rezultă că 2 × 49 = 98 , deci putem rescrie problema astfel: 98 = (2 × 49) .

Continuați să extindeți numerele până când produsul a două numere identice și a altor numere rămâne sub rădăcină.

Să luăm exemplul nostru (2 × 49):

Deoarece 2 este deja simplificat maxim, trebuie să simplificăm 49 . Căutăm un număr prim cu care 49 poate fi împărțit. Evident, nici 3, nici 5 nu se potrivesc. Au mai rămas 7: 49 ÷ 7 = 7 , deci 7 × 7 = 49 .

Scriem exemplul sub următoarea formă: (2 × 49) = (2 × 7 × 7) .

Simplificați expresia rădăcinii pătrate.

Întrucât între paranteze avem produsul lui 2 și două numere identice (7), atunci putem scoate numărul 7 din semnul rădăcinii.

Exemplul 2

(2 × 7 × 7) = (2) × (7 × 7) = (2) × 7 = 7(2) .

În momentul în care există două numere identice sub rădăcină, opriți factorizarea numerelor. Desigur, dacă ați folosit la maximum toate posibilitățile.

Amintiți-vă: există rădăcini care pot fi simplificate de multe ori.

În acest caz, se înmulțesc numerele pe care le scoatem de sub rădăcină și numerele care stau în fața acesteia.

Exemplul 3

180 = (2 × 90) 180 = (2 × 2 × 45) 180 = 2 45

dar 45 poate fi factorizat și rădăcina simplificată încă o dată.

180 = 2 (3 × 15) 180 = 2 (3 × 3 × 5) 180 = 2 × 3 5 180 = 6 5

Când este imposibil să obțineți două numere identice sub semnul rădăcinii, aceasta înseamnă că o astfel de rădăcină nu poate fi simplificată.

Dacă, după descompunerea expresiei rădăcinii într-un produs de numere prime, nu ați reușit să obțineți două numere identice, atunci o astfel de rădăcină nu poate fi simplificată.

Exemplul 4

70 = 35 × 2, deci 70 = (35 × 2)

35 = 7 x 5 deci (35 x 2) = (7 x 5 x 2)

După cum puteți vedea, toți cei trei factori sunt numere prime care nu pot fi factorizate. Nu există numere identice printre ele, așa că nu este posibil să scoateți un număr întreg de sub rădăcină. **Simplifica** 70 **este interzis.**

pătrat plin

Memorează câteva pătrate de numere prime.

Pătratul unui număr se obține prin înmulțirea lui cu el însuși, adică. la pătrare. Dacă memorați o duzină de pătrate de numere prime, atunci acest lucru vă va simplifica foarte mult viața în continuarea simplificării rădăcinilor.

Exemplul 5

1 2 = 1 2 2 = 4 3 2 = 9 4 2 = 16 5 2 = 25 6 2 = 36 7 2 = 49 8 2 = 64 9 2 = 81 10 2 = 100

Dacă există un pătrat plin sub semnul rădăcinii pătrate, atunci merită să eliminați semnul rădăcinii și să scrieți rădăcina pătrată a acestui pătrat complet.

Complicat? Nu:

Exemplul 6

1 = 1 4 = 2 9 = 3 16 = 4 25 = 5 36 = 6 49 = 7 64 = 8 81 = 9 100 = 10

Încercați să descompuneți numărul de sub semnul rădăcinii în produsul unui pătrat complet și al unui alt număr.

Dacă vedeți că expresia rădăcinii este descompusă în produsul unui pătrat complet și al oricărui număr, atunci amintindu-vă câteva exemple, veți economisi în mod semnificativ timp și nervi:

Exemplul 7

50 = (25 × 2) = 5 2 . Dacă numărul rădăcină se termină cu 25, 50 sau 75, îl puteți factor întotdeauna în produsul lui 25 și alt număr.

1700 \u003d (100 × 17) \u003d 10 17. Dacă numărul rădăcină se termină cu 00, îl puteți descompune oricând în produsul dintre 100 și un număr.

72 = (9 × 8) = 3 8 . Dacă suma cifrelor unui număr rădăcină este 9, o puteți descompune oricând în produsul lui 9 și un număr.

Încercați să descompuneți numărul rădăcinii în produsul mai multor pătrate întregi: scoateți-le de sub semnul rădăcinii și înmulțiți.

Exemplul 8

72 = (9 × 8) 72 = (9 × 4 × 2) 72 = 9 × 4 × 2 72 = 3 × 2 × 2 72 = 6 2

Dacă observați o greșeală în text, vă rugăm să o evidențiați și să apăsați Ctrl+Enter

Scopul simplificării rădăcinii pătrate este de a o rescrie într-o formă mai ușor de utilizat în calcule. Factorizarea unui număr înseamnă găsirea a două sau mai multe numere care, atunci când sunt înmulțite, vor da numărul inițial, de exemplu, 3 x 3 = 9. Găsind factorii, puteți simplifica rădăcina pătrată sau puteți scăpa de ea cu totul. De exemplu, √9 = √(3x3) = 3.

Dacă numărul rădăcinii este par, împărțiți-l la 2. Dacă numărul rădăcină este impar, încercați să-l împărțiți la 3 (dacă numărul nu este divizibil cu 3, împărțiți-l la 5, 7 și așa mai departe prin lista de numere prime). Împărțiți numărul radical exclusiv la numere prime, deoarece orice număr poate fi descompus în factori primi. De exemplu, nu trebuie să împărțiți numărul rădăcinii la 4, deoarece 4 este divizibil cu 2 și ați împărțit deja numărul rădăcinii la 2.

Rescrieți problema ca rădăcină a produsului a două numere. De exemplu, să simplificăm √98: 98 ÷ 2 = 49, deci 98 = 2 x 49. Rescrieți problema după cum urmează: √98 = √(2 x 49).

- Continuați să extindeți numerele până când produsul dintre două numere identice și alte numere rămâne sub rădăcină. Acest lucru are sens când te gândești la semnificația rădăcinii pătrate: √(2 x 2) este egal cu un număr care, înmulțit cu el însuși, este 2 x 2. Evident, acest număr este 2! Repetați pașii de mai sus pentru exemplul nostru: √(2 x 49).

    - 2 este deja simplificat pe cât posibil, deoarece este un număr prim (vezi lista numerelor prime de mai sus). Deci factorizează numărul 49.
    - 49 nu e divizibil cu 2, 3, 5. Deci, treceți la următorul număr prim, 7.
    - 49 ÷ 7 = 7, deci 49 = 7 x 7.
    - Rescrieți problema astfel: √(2 x 49) = √(2 x 7 x 7).

- **Simplificați rădăcina pătrată.** Deoarece rădăcina este produsul dintre 2 și două numere identice (7), puteți scoate un astfel de număr din semnul rădăcinii. În exemplul nostru: √(2 x 7 x 7) = √(2)√(7 x 7) = √(2) x 7 = 7√(2).

    - Odată ce aveți două numere identice sub rădăcină, puteți opri factorizarea numerelor (dacă acestea pot fi încă factorizate). De exemplu, √(16) = √(4 x 4) = 4. Dacă continuați să factorizați numerele, veți obține același răspuns, dar veți face mai multe calcule: √(16) = √(4 x 4) = √(2) x 2 x 2 x 2) = √(2 x 2) √(2 x 2) = 2 x 2 = 4.

- **Unele rădăcini pot fi simplificate de multe ori.**În acest caz, se înmulțesc numerele scoase de sub semnul rădăcinii și numerele din fața rădăcinii. De exemplu:

    - √180 = √(2 x 90)
    - √180 = √(2 x 2 x 45)
    - √180 = 2√45, dar 45 poate fi factorizat și rădăcina simplificată din nou.
    - √180 = 2√(3 x 15)
    - √180 = 2√(3 x 3 x 5)
    - √180 = (2)(3√5)
    - √180 = 6√5

• **Dacă nu puteți obține două numere identice sub semnul rădăcinii, atunci o astfel de rădăcină nu poate fi simplificată.** Dacă ați descompus expresia rădăcinii într-un produs de factori primi, iar printre aceștia nu există două numere identice, atunci o astfel de rădăcină nu poate fi simplificată. De exemplu, să încercăm să simplificăm √70:

- 70 = 35 x 2 deci √70 = √(35 x 2)
- 35 = 7 x 5 deci √(35 x 2) = √(7 x 5 x 2)
- Toți cei trei factori sunt primi, deci nu mai pot fi factorizați. Toți cei trei factori sunt diferiți, așa că nu veți putea obține un număr întreg din semnul rădăcină. Prin urmare, √70 nu poate fi simplificat.

Radacina patrata (radicalul)

Prin radacina patrata $x = \sqrt{a}$, din numarul nenegativ *a* întelegem numarul nenegativ *x*, care înmultit cu el însusi da o valoare egala cu *a*.

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow a = x^2$$

Proprietăţi

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $a > 0$, $b > 0$;
2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a > 0$, $b > 0$.

Multimea numerelor reale

Definitie

Numim *număr iraţional* (pozitiv sau negativ) un numar care poate fi reprezentat cu ajutorul unei fractii zecimale neperiodice, cu partea zecimala formata din numere care *nu se repetă periodic*.

Exemplu : $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $1-\sqrt{3}$

Multimea tuturor numerelor irationale se noteaza prin *I*. Reunind multimea ***Q*** a numerelor rationale cu multimea ***I*** a numerelor irationale, obtinem o noua multime care o notam prin ***R*** si o numim *multimea numerelor reale*. Elementele acestei multimi se numesc *numere reale*.

Între multimile ***N***, ***Z***, ***Q***, ***R*** exista relatia de incluziune:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Adunarea şi înmulţirea numerelor reale.

Proprietati

Fie x, y doua numere reale.

1. *Adunarea* este asociativa si comutativa.
2. Exista numarul real 0 (zero) astfel încât $x+0=x$, pentru orice $x \in R$
3. Pentru orice $x \in R$ exista numarul $-x \in R$ astfel încât $x+(-x)=0$.
4. *Înmulţirea* este asociativa si comutativa.
5. Exista numarul real 1 ($1 \neq 0$) astfel încât $x \cdot 1=x$ pentru orice $x \in R$.
6. Pentru orice $x \in R$, $x \neq 0$ exista numarul $x^{-1} \in R$ (notat si $\frac{1}{x}$) astfel incat $x \cdot x^{-1} = 0$
7. Înmultirea este distributiva în raport cu adunarea, adica $x(y+z)=xy+xz$, pentru orice $x, y, z \in R$.

Modulul unui numar real

Modulul numarului real x il notam cu $|x|$ si il definim astfel :

$$|x| = \begin{cases} x, daca\ x \geq 0 \\ -x, daca\ x < 0 \end{cases}.$$

Deducem din aceasta definitie ca avem doua cazuri :

- daca x este un numar real pozitiv sau nul (egal cu 0), atunci el coincide cu modulul sau: $|x| = x$. Ex : $|5| = 5$;
- daca x este un numar real negativ, atunci $|x| = -x$. Cum x este negativ, inseamna ca $|x| = -x$ este un numar pozitiv, mai exact, in acest caz, modulul coincide cu numarul considerat fara semnul "-". Ex. $|-3| = 3$.

Daca in loc de x avem o expresie $E(x)$, atunci modulul sau va fi:

$$|E(x)| = \begin{cases} E(x), daca\ E(x) \geq 0 \\ -E(x), daca\ E(x) < 0 \end{cases}$$

Cand scriem modulul unei expresii sau al unui numar real sub formele de mai sus, spunem ca explicitam modulul.

Exemplu.

Sa se expliciteze expresia $|-x+3|$.

Solutie

Avem de a face cu modulul unei expresii. Vom scrie, folosind definitia de mai sus :

$$|-x+3| = \begin{cases} -x+3, daca -x+3 \ge 0 \\ -(-x+3), daca -x+3 < 0 \end{cases}.$$

Facand calculele, rezulta :

$$|-x+3| = \begin{cases} -x+3, daca\ x \le 3 \\ x-3, daca\ x > 3 \end{cases}.$$

Modulul unui nuar real sau al unei expresii reale poate aparea atat in cadrul unei ecuatii cat si in cadrul unei inecuatii. In acest caz, pentru rezolvare, se expliciteaza mai intai modulul expresiei care apare si apoi se iau, pe rand, toate cazurile care apar. De exemplu, in cazul expresiei de mai sus, am avea doua cazuri : cazul cand $x \le 3$ si cazul cand $x > 3$. In fiecare caz, expresia modulului va fi alta, si se vor obtine diferite solutii. Solutia finala va fi data de reuniunea solutiilor din cele doua (sau mai multe) cazuri (nu de intersectia lor, ca la sistemele de inecuatii !!!)

Exemplu

Sa se rezolve ecuatia : $|-x+3| = 4$.

Solutie

Pentru a putea rezolva aceasta ecuatie, este nevoie, mai intai, sa se expliciteze modulul.

In exemplul anterior am explicitat modulul care apare, obtinand:

$$|-x+3| = \begin{cases} -x+3, daca\ x \le 3 \\ x-3, daca\ x > 3 \end{cases}$$

Vom avea, deci, doua cazuri:

- cazul I: daca $x \le 3$
- cazul II : daca $x > 3$.

Vom lua fiecare caz pe rand.

Cazul I.

Daca $x \le 3$, din explicitarea de mai sus, rezulta ca $|-x+3| = -x+3$. Inseamna ca, in ecuatia data, in loc de modul vom scrie expresia obtinuta. Ecuatia va deveni :

$$-x+3=4$$

Rezulta de aici solutia $x=-1$. Mai trebuie insa sa ne asiguram ca solutia obtinuta de noi face parte din intervalul pe care lucram, anume $x \le 3$. Cum $x=-1 \le 3$, inseamna ca solutia din primul caz este, intr-adevar, $x=-1$.

Observatie.

Daca, de exemplu, am fi obtinut solutia $x = 5$, aceasta nu ar fi fost o solutie reala, deoarece 5 nu face parte din intervalul cazului I, interval care ne spune ca $x \leq 3$. In acest caz am fi spus ca nu avem solutie in cazul I.

Cazul II.

Daca $x > 3$, avem $|-x+3| = x-3$. Ecuatia va deveni, in acest caz: $x-3=4$, cu solutia $x = 7$, care "convine", deoarece se incadreaaz in intervalul pe care lucram: $x = 7 > 3$.

Solutia finala a ecuatiei va fi data de reuniunea solutiilor gasite in fiecare caz, deci vom avea $x \in \{-1,7\}$.

Exemplu

Sa se rezolve ecuatia: $|x+1| + |x-3| = 4$.

Solutie

Observam ca in acest caz avem doua module. Va trebui sa le explicitam pe fiecare dintre ele, apoi vom vedea ce cazuri distincte vor fi de rezolvat.

Vom incepe cu primul modul :

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, daca\ x+1 \geq 0 \\ -(x+1), daca\ x+1 < 0 \end{cases},$$

adica

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, daca\ x \geq -1 \\ -x-1, daca\ x < -1 \end{cases}$$

Cel de-al doilea modul va fi :

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, daca\ x-3 \geq 0 \\ -(x-3), daca\ x-3 < 0 \end{cases}$$

adica

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, daca\ x \geq 3 \\ -x+3), daca\ x < 3 \end{cases}$$

In cazul cand sunt mai multe module, pentru a putea vedea mai simplu care sunt toate cazurile care rezulta, este usor sa facem un tabel de forma urmatoare :

x	
$\lvert x+1\rvert$	
$\lvert x-3\rvert$	

Pe prima linie a tabelului, care corespunde lui *x*, vom trece cea mai mica valoare posibila a lui *x*, cea mai mare, precum si toate valorile obtinute la explicitare pentru *x*, in ordinea lor (cea mai mica la stanga, cea mai mare la dreapta). In cazul nostru, cea mai mica valoare posibila a lui *x* este $-\infty$, cea mai mare este ∞, iar valorile gasite la explicitare sunt : -1 (valoare obtinuta la primul modul) si 3 (valoare obtinuta la al doilea modul).

Tabelul va arata astfel :

x	$-\infty$	-1	3	∞
$\lvert x+1\rvert$				
$\lvert x-3\rvert$				

Pentru $|x+1|$, avem doua expresii : $|x+1| = \begin{cases} x+1, daca\ x \geq -1 \\ -x-1, daca\ x < -1 \end{cases}$. In valoarea $x=-1$, modulul este 0. Vom trece in tabel, pe linia lui $|x+1|$, in dreptul lui -1, valoarea 0. Daca $x<-1$, adica daca $x \in (-\infty,-1)$atunci avem $|x+1| = -x-1$. Vom trece aceasta expresie in bucata din tabel dintre $-\infty$ si -1. Daca $x \geq -1$, adica daca $x \in [-1,\infty)$, avem $|x+1| = x+1$ si vom trece aceasta expresie in tabel.

Vom avea :

x	$-\infty$		-1		3		∞
$\lvert x+1\rvert$		$\lvert x+1\rvert = -x-1$	0	$\lvert x+1\rvert = x+1$			
$\lvert x-3\rvert$							

Observam ca, in momentul in care am completat in tabel linia corespunzatoare lui $|x+1|$, nu ne-a interesat valoarea 3, deoarece aceasta nu are nici o importanta pentru $|x+1|$. Ea va conta pentru $|x-3|$, reprezentand valoarea in care acest al doilea modul se anuleaza. Vom proceda ca mai inainet si pentru $|x-3|$, iar tabelul va arata in final astfel :

x	$-\infty$		-1		3		∞
$\lvert x+1\rvert$		$\lvert x+1\rvert = -x-1$	0	$\lvert x+1\rvert = x+1$			
$\lvert x-3\rvert$			$\lvert x-3\rvert = -x+3$		0	$\lvert x-3\rvert = x-3$	

Acum, dupa ce tabelul a fost completat, vom putea vedea care sunt cazurile penrtu ecuatia considerata.

Se vad astfel urmatoarele cazuri :

- daca $x < -1$, avem $|x+1| = -x-1$ si $|x-3| = -x+3$;
- daca $x \in [-1,3)$, avem $|x+1| = x+1$ si $|x-3| = -x+3$;
- daca $x \geq 3$, avem $|x+1| = x+1$ si $|x-3| = x-3$.

In acest moment in care am identificat trei cazuri, putem sa le luam pe rand si sa rezolvam ecuatia considerata pentru fiecare varianta.

Cazul I.

Daca $x < -1$, avem $|x+1| = -x-1$ si $|x-3| = -x+3$. Ecuatia $|x+1| + |x-3| = 4$ va deveni : $-x-1+(-x+3) = 4$, adica $-2x+2 = 4$, deci $x = -1$. Dar suntem in cazul $x < -1$ (x strict mai mic decat -1), deci solutia obtinuta $x = -1$ nu se incadreaza. Rezulta ca nu avem nici o solutie in acest caz.

Cazul II.

Daca $x \in [-1,3)$, avem $|x+1| = x+1$ si $|x-3| = -x+3$. Ecuatia $|x+1| + |x-3| = 4$ va deveni : $x+1+(-x+3) = 4$, de unde obtinem identitatea $4 = 4$. In acest caz, oricare ar fi numarul real x din intervalul pe care lucram, adica oricare ar fi $x \in [-1,3)$, relatia este indeplinita. Rezulta de aici solutia $x \in [-1,3)$.

Cazul III.

Daca $x \geq 3$, avem $|x+1| = x+1$ si $|x-3| = x-3$. $|x+1| + |x-3| = 4$ va deveni : $x+1+x-3 = 4$, adica $2x = 6$ deci $x = 3$. Aceasta solutie se regaseste in intervalul considerat in acest caz, $x \geq 3$, deci este o solutie pentru ecuatia data.

Solutia ecuatiei considerate va fi reuniunea solutiilor gasite in cele trei cazuri, adica $x \in [-1,3) \cup \{3\}$, deci $x \in [1,3]$.

Observatii.

1. Tabelul pe care l-am folosit in acest exemplu se completeaza dintr-o data, nu este nevoie sa se deseneze de fiecare data cand completam o linie. Am procedat astfel la acest exemplu pentru a putea explica mai simplu care sunt pasii ce trebuie facuti.
2. Tabelul poate fi folosit si in cazul in care exista in ecuatie mai multe module (3, 4, 5, …), adaugand pentru fiecare modul cate o linie in tabel.

3. Ecuatii, inecutii si sisteme de ecuatii

o Ecuatii de gradul I cu coeficienti in Z; probleme care se rezolva folosind ecuatii de acest tip
o Inecuatii de gradul I, cu coeficienti numere intregi
o Sisteme de doua ecuatii liniare cu doua necunoscute, cu coeficienti numere intregi (metoda substitutiei, metoda reducerii); probleme care se rezolva cu ajutorul sistemelor de doua ecuatii cu doua necunoscute

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

ECUATII SI INECUATII DE GRADUL I, SISTEME DE ECUATII SI INECUATII DE GRADUL I

Ecuatii si inecuatii

O expresie de forma $E(x, y, ...) = 0$ se numeste ecuatie cu necunoscutele x, y, … In cazul in care expresia contine o singura necunoscuta, atunci ecuatia va fi de forma : $E(x) = 0$.

Numim solutie sau radacina a ecuatiei $E(x) = 0$ o valoare a, daca inlocuind in locul necunoscutei x din ecuatia considerata, vom obtine o identitate (o propozitie adevarata, 0=0).

In continuare ne vom ocupa numai de ecuatii cu coeficienti reali.

In functie de forma expresiei $E(x)$, ecuatia poate fi de gradul I, de gradul II, etc.

O ecuatie de gradul I cu coeficienti reali are forma generala :

$ax + b = 0$, unde $a \neq 0$, $a, b \in R$

Pentru a rezolva o astfel de ecuatie se procedeaza in felul urmator :

- se scade in ambii termeni valoarea b : $ax + b - b = -b$
- rezulta astfel : $ax = -b$
- cum $a \neq 0$, putem imparti ambii termeni la numarul real a : $ax : a = -b : a$
- rezulta : $x = -b : a$, adica $x = -\frac{b}{a}$

Putem concluziona ca solutia ecuatiei $ax + b = 0$, unde $a \neq 0$, $a, b \in R$ este $x = -\frac{b}{a}$

.

In unele cazuri, coeficientii a si b, sau unul dintre ei, nu au valori exacte, cunoscute, ci parametri reali care pot lua orice valori din multimea numerelor reale.

Cum din definitia ecuatiei se observa ca trebuie sa avem $a \neq 0$, rezulta ca, in cazul unei ecuatii cu parametru, va fi nevoie sa punem o conditie : coeficientul lui x sa fie diferit de 0. In urma acestei conditii, vor rezulta diferite cazuri pentru ecuatia noastra, cazuri pe care trebuie sa le analizam unul cate unul. Este vorba despre ceea ce numim discutie.

Exemplu :

Sa se rezolve ecuatia $(m-1)x+3=0$, unde m este un parametru real.

Solutie

Inainte de a trece la rezolvarea propriu-zisa a ecuatiei si determinarea solutiei acesteia, trebuie sa punem conditia $m-1 \neq 0$, adica $m \neq 1$. Deci, pentru ca ecuatia sa fie de gradul I, este nevoie ca $m \neq 1$. Dar m este un parametru real, si poate lua **orice** valoare reala, adica si $m=1$. Va trebui sa vedem astfel ce se intampla cu ecuatia si cu solutiile ei in ambele situatii : $m \neq 1$ si $m=1$.

Cazul 1. Daca $m=1$, ecuatia devine $0 \cdot x+3=0$, care nu este adevarata pentru nici o valoare x reala. Spunem ca in cazul $m=1$, ecuatia nu are solutie.

Cazul 2. Daca $m \neq 1$, ecuatia este o ecuatie de gradul I pe care o rezolvam ca in cazul general prezentat mai sus :

Din $(m-1)x+3=0$ rezulta $(m-1)x=-3$. Cum $m \neq 1$, inseamna ca $m-1 \neq 0$, deci putem imparti si in stanga si in dreapta prin $m-1$. Obtinem $x=-\dfrac{3}{m-1}$.

Sisteme de ecuatii

Un sistem de ecuatii este format din mai multe ecuatii care admit aceeasi solutie. Ecuatiile sistemului pot avea un numar oarecare de necunoscute si pot avea diferite forme.

Ne intereseaza numai sistemele de ecuatii de gradul I, adica acele sisteme in ale caror ecuatii toate necunoscutele apar la puterea I.

Pentru a rezolva astfel de sisteme (numite si liniare) putem folosi metoda reducerii sau metoda substitutiei. Vom prezenta aceste metode in exemplele care urmeaza.

Exemplu.

Sa se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases}.$$

Solutie

Metoda reducerii

Aceasta metoda consta in reducerea sistemului de ecuatii la o ecuatie cu o singura necunoscuta. Dupa rezolvarea acesteia, se inlocuieste valoarea obtinuta intr-una din ecuatiile sistemului si se obtine astfel si a doua necunoscuta.

Pentru a reduce sistemul, se pot folosi urmatoarele operatii : adunarea (scaderea) ecuatiilor, inmultirea unei ecuatii cu un numar real diferit de 0 si adunarea ei la alta ecuatie (eventual inmultita si ea cu un numar real diferit de 0).

In cazul sistemului de mai sus, observam ca daca adunam cele doua ecuatii, necunoscuta y se va reduce, obtinand astfel o ecuatie de gradul I in x :

$$5x = 5$$

de unde rezulta $x = 1$.

Cum stim valoarea lui x, putem sa inlcouim intr-una din ecuatii aceasta valoare si il vom afla si pe y. Sa inlocuim in prima ecuatia.

Avem $2x + y = 4$. Dar $x = 1$, deci ecuatia devine $2 \cdot 1 + y = 4$, de unde obtinem $y = 2$.

Solutia sistemului va fi : $x = 1$, $y = 2$.

Metoda substitutiei

Aceasta metoda consta in determinarea unei necunoscute in functie de cealalta din una din cele doua ecuatii si inlocuirea ei in cealalta ecuatie.

In cazul sistemului de mai sus, din prima ecuatie il scoatem pe y : $y = 4 - 2x$ si il inlocuim in cea de-a doua relatie : $3x - y = 1$, obtinand : $3x - (4 - 2x) = 1$. Facem calculele in aceasta ecuatie si obtinem $x = 1$. Cum $y = 4 - 2x$, rezulta $y = 2$.

Solutia sistemului va fi : $x = 1$, $y = 2$.

Inecuatii

Ne vor interesa numai inecuatiile de gradul I. Acestea au una din urmatoarele forme generale :

$ax + b \geq 0$, sau $ax + b > 0$, sau $ax + b \leq 0$ sau $ax + b < 0$, unde a si b sunt coeficienti reali, $a \neq 0$.

Pentru a rezolva o inecuatie de gradul I se procedeaza asemanator cu ecuatia de gradul I, numai ca de aceasta data solutia nu este unica, ci ea va fi un interval din multimea numerelor reale.

Observatie

Daca se inmultesc ambii termeni ai unei inecuatii cu un numar, trebuie sa se aiba in vedere semnul numarului cu care se inmulteste precum si semnul inecuatiei. Daca numarul este pozitiv, nu se modifica semnul inecuatiei, daca insa acesta este negativ, se va schimba si semnul inecuatiei (daca inmultim ecuatia $2x-1>0$ cu numarul 2, ea va deveni $4x-2>0$; daca o inmultim cu -2, se va modifica si semnul inecuatiei : $4x-2<0$.

Exemplu

Sa se rezolve inecuatia $-2x+4>0$.

Solutie

Scadem 4 din ambii termeni si rezulta $-2x>-4$. Vom inmulti inecuatia cu -1, care, fiind un numar negativ, va duce la schimbarea semnului inecuatiei : $2x<4$. Obtinem, prin impartirea inecuatie la 2 (numar pozitiv, de data aceasta), solutia $x<2$.

Sisteme de inecuatii

Sistemele de inecuatii sunt alcatuite din mai multe inecuatii, care admit aceleasi solutii. Pentru rezolvarea acestora, se rezolva fiecare dintre inecuatii si se intersecteaza ulterior solutiile obtinute.

Exemplu

Sa se rezolve sistemul : $\begin{cases} -2x+4>0 \\ 3x-1>2 \end{cases}$.

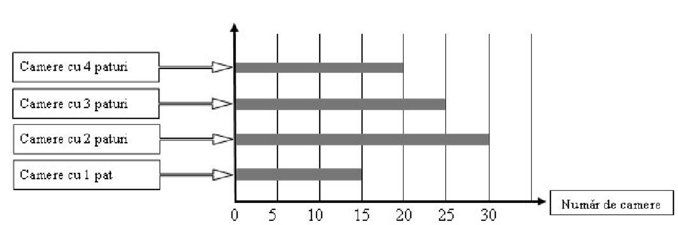
Solutie

Prima inecuatie a sistemului am rezlvat-o mai sus, obtinand solutia $x<2$. Trebuie sa rezolvam acum si a doua inecuaie : $3x-1>2$. Adunam in ambii membri 1, si rezulta : $3x>3$. Impartind prin 3, obtinem solutia celei de-a doua inecuatii, anume : $x>1$. Cum solutia sistemului trebuie sa indeplineasca ambele conditii, adica sa fie solutie si a primei inecuatii si a celei de-a doua, rezulta ca trebuie sa intersectam cele doua intervale de solutii, adica trebuie sa gasim elementele care verifica atat solutia primei inecuatii, $x<2$, cat si a celei de-a doua : $x>1$. Obtinem solutia sistemului : $1<x<2$ sau, scriind sub forma de interval : $x\in(1,2)$.

4. Elemente de organizare a datelor
o Reprezentarea si interpretarea unor dependente functionale prin tabele, diagrame si grafice

Probleme de organizare a datelor - clasa a V-a

1) Diagrama de mai jos arată numărul de camere ale unui hotel.



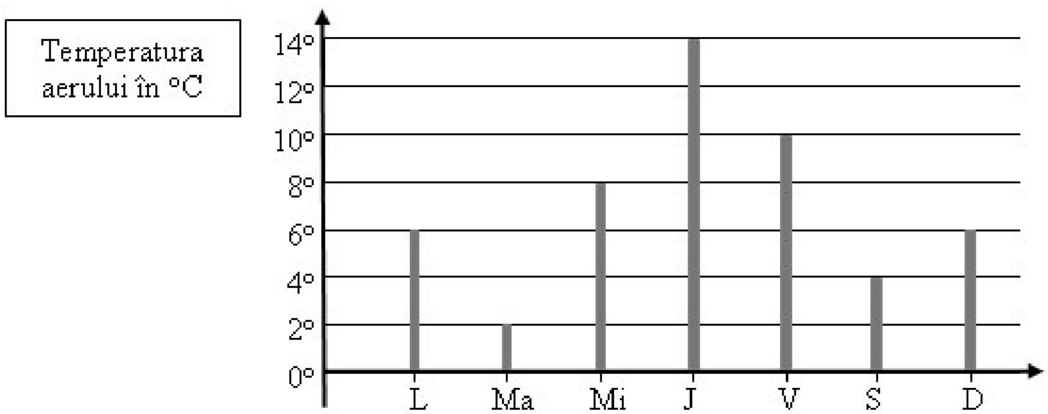
a) Completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Felul camerei	**cu un pat**	**cu 2 paturi**	**cu 3 paturi**	**cu 4 paturi**
Număr de camere				

b) Câte camere are acest hotel?

c) Câte locuri de cazare are acest hotel? (un pat = un loc)

2) În diagrama următoare sunt redate temperaturile măsurate pe parcursul unei săptămâni.



a) Completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Ziua	**Luni**	**Marți**	**Miercuri**	**Joi**	**Vineri**	**Sâmbătă**	**Duminică**
Temperatura aerului							

b) Calculaţi temperatura medie a săptămânii.

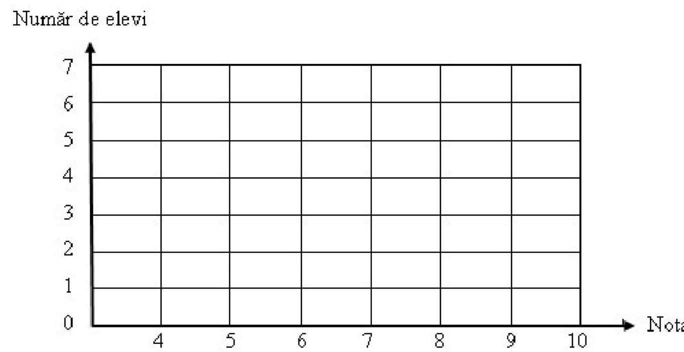
3) În tabelulde mai jos sunt reprezentate rezultatele obţinute de toţi elevii unei clase la teza din semestrul I la matematică.

Nota	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Număr de elevi	1	4	5	6	7	4	2

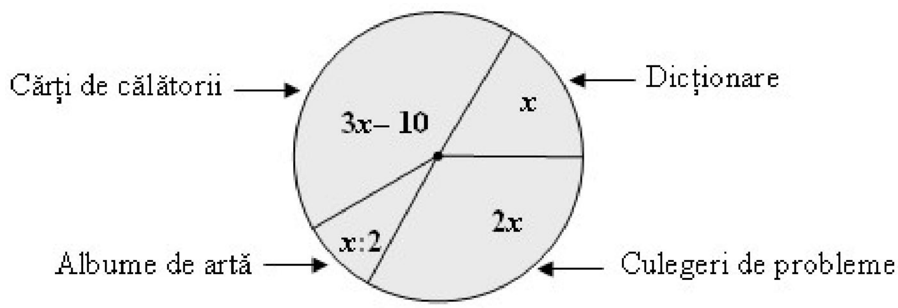
a) Calculaţi numărul de elevi ai acestei clase.

b) Calculaţi numărul de elevi care au obţinut note de 8, 9 sau 10.

c) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi diagrama (cu bare verticale) corespunzătoare.



4) Diagrama circulară de mai jos arată componenţa unei biblioteci. Ştim că numărul culegerilor de probleme este 40.

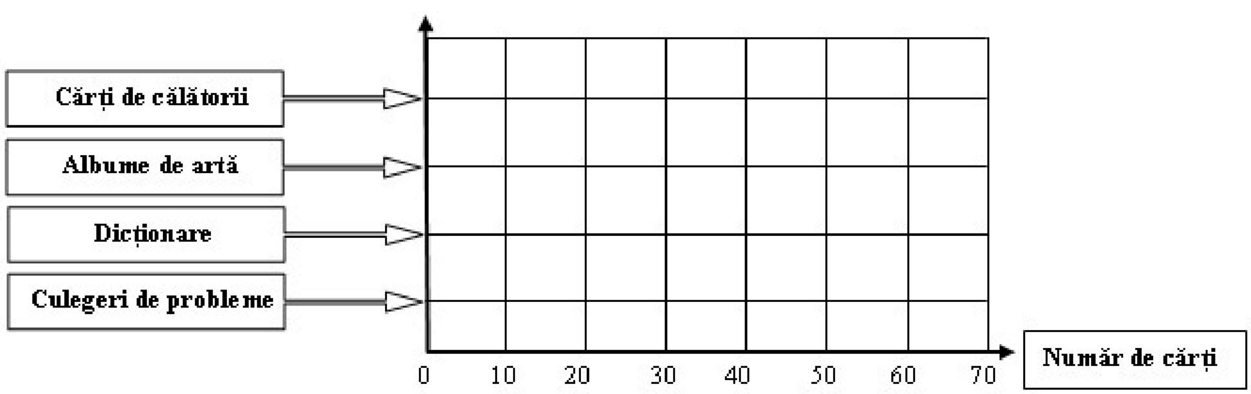


a) Completaţi tabelul următor.

Felul cărţii	**Culegeri de probleme**	**Dicţionare**	**Albume de artă**	**Cărţi de călătorii**
Nr. de cărţi				

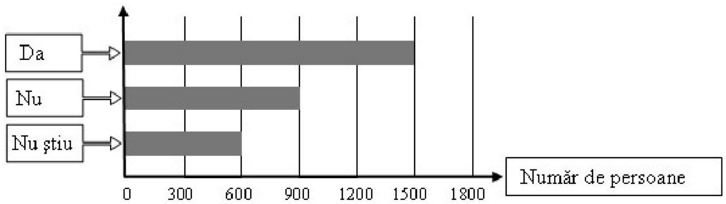
b) Aflaţi numărul total de cărţi din bibliotecă.

c) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi o diagramă cu bare orizontale.



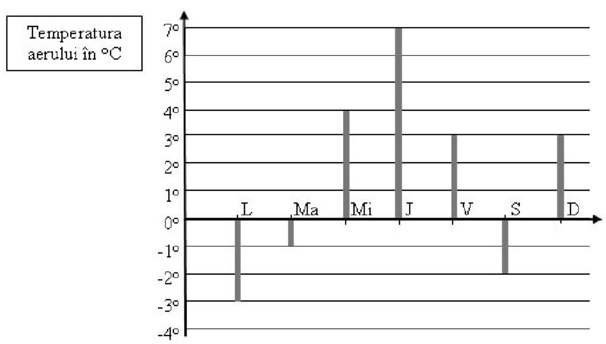
Probleme de organizare a datelor - clasa a VI-a

1) Graficul unui sondaj de opinie apare pe calculator ca în diagrama următoare.



Numărul total de persoane care au participat la acest sondaj este ......

2) În diagrama de mai jos sunt redate temperaturile măsurate pe parcursul unei săptămâni.



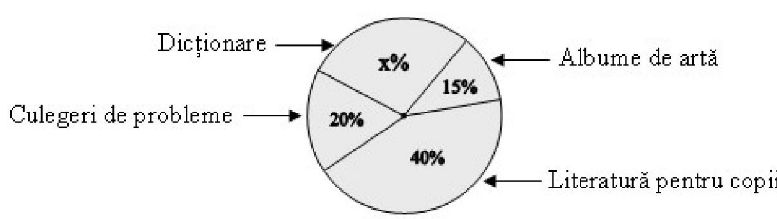
a) Completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Ziua	**Luni**	**Marți**	**Miercuri**	**Joi**	**Vineri**	**Sâmbătă**	**Duminică**
Temperatura aerului							

b) Care este diferenţa de temperatură dintre cea mai călduroasă zi şi cea mai friguroasă zi?

c) Care a fost temperatura medie a săptămânii?

3) În diagrama alăturată este expusă, în procente, componenţa bibliotecii şcolii. Ştim că numărul culegerilor de probleme este 1200.



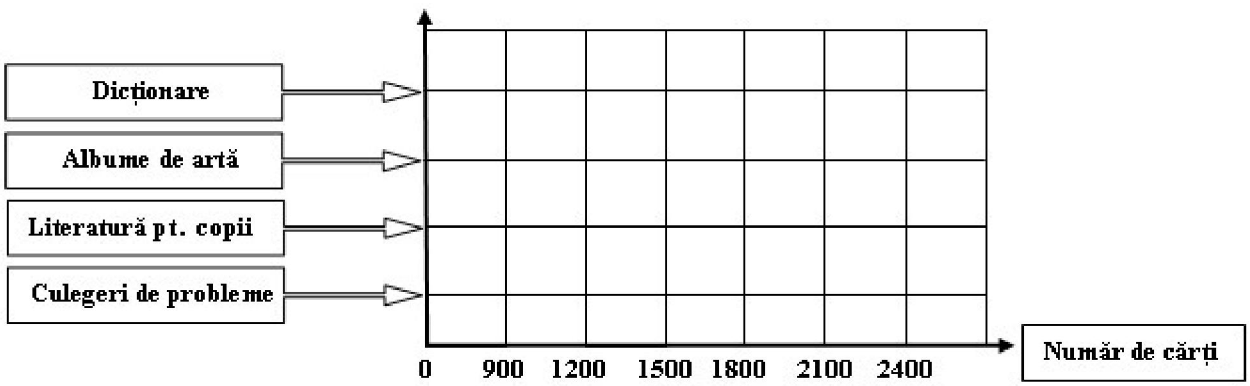
a) Aflaţi procentul reprezentat de dicţionare.

b) Completaţi tabelul următor.

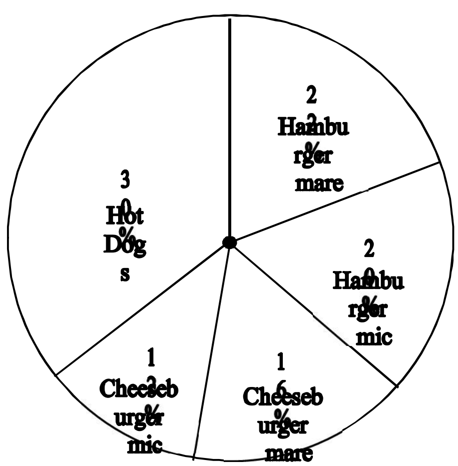
Felul cărţii	**Culegeri de probleme**	**Literatură pentru copii**	**Albume de artă**	**Dicţionare**
Nr. de cărţi				

c) Aflaţi numărul total de cărţi din bibliotecă.

d) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi o diagramă cu bare orizontale.



4) Diagrama circulară de mai jos prezintă, în procente, vânzările unei firme de fast-food.



Acest tabel arată preţurile.

Hot Dogs ………………..$ 1.80	
Hamburger mic …………..$ 1.50	
Hamburger mare …………$ 2.50	
Cheeseburger mic………..$ 1.75	
Cheeseburger mare ……….$ 2.75	

Într-o săptămână obişnuită se vând 1500 bucăţi de hot dogs şi burgers.

a) Câţi hot dogs se vând ?

b) De câte felii de brânză este nevoie ?

c) Pentru un burger mic se folosesc 80 g de carne, iar pentru unul mare 125 g de carne. Ce cantitate de carne trebuie comandată ?

d) Care este valoarea totală a vânzărilor într-o săptămână ?

Reprezentarea şi interpretarea unor dependenţe funcţionale prin tabele, diagrame şi grafice - clasa a VII-a

1) În tabelul de mai jos este prezentată repartiţia elevilor unei şcoli după notele obţinute la un concurs. Numărul elevilor care au obţinut o notă mai mică decât 7 este ......

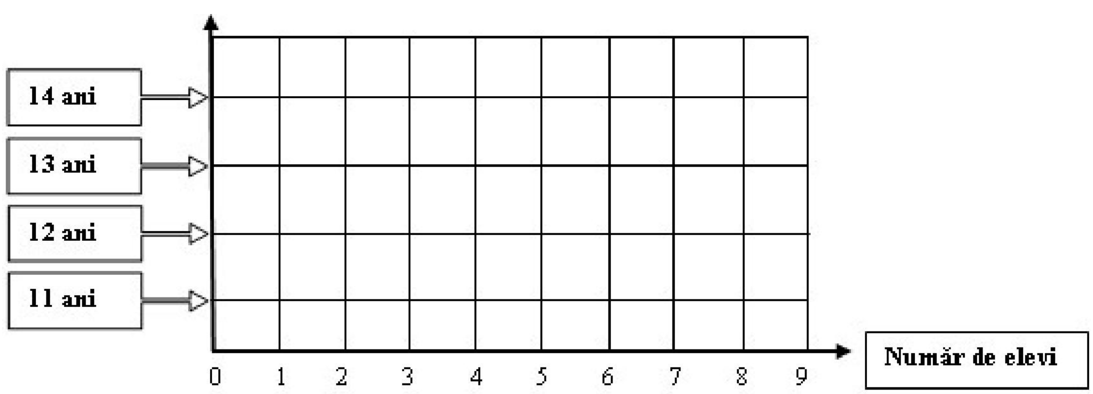
Note	mai mici decât 5	5 – 5.99	6 – 6.99	7 – 7.99	8 – 8.99	9 – 9.99	10
Nr. de elevi	8	12	25	20	15	8	2

2) Numărul elevilor dintr-un lot de atletism şi vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârstă (ani)	11	12	13	14
Număr elevi	9	4	5	2

a) Calculaţi numărul elevilor din lot.

b) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi diagrama (cu bare orizontale) corespunzătoare.

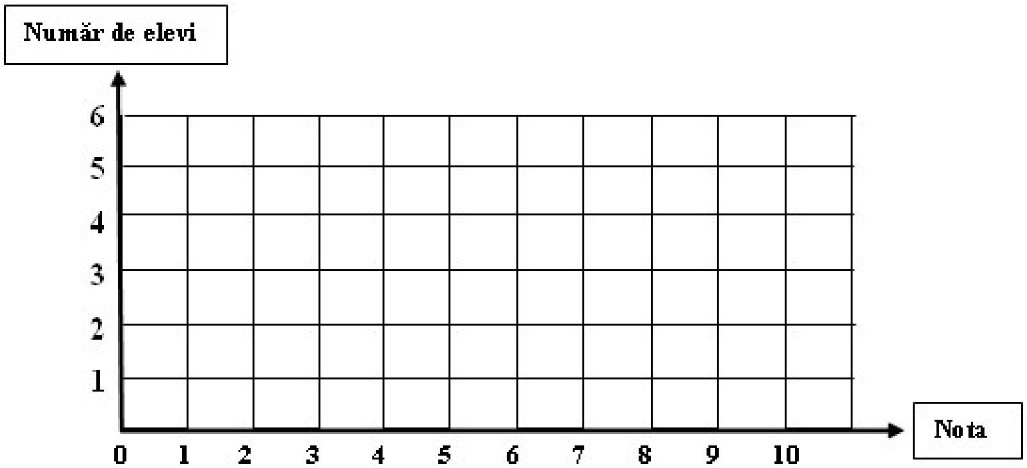


3) În tabelul de mai jos sunt trecute rezultatele obţinute de elevi la testul dat la biologie.

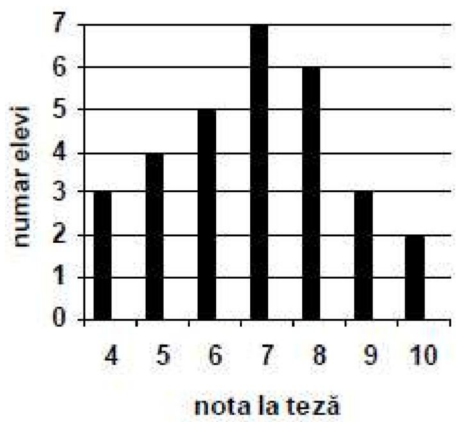
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. de elevi	-	-	-	2	3	4	6	5	2	3

a) Aflaţi media pe clasă.

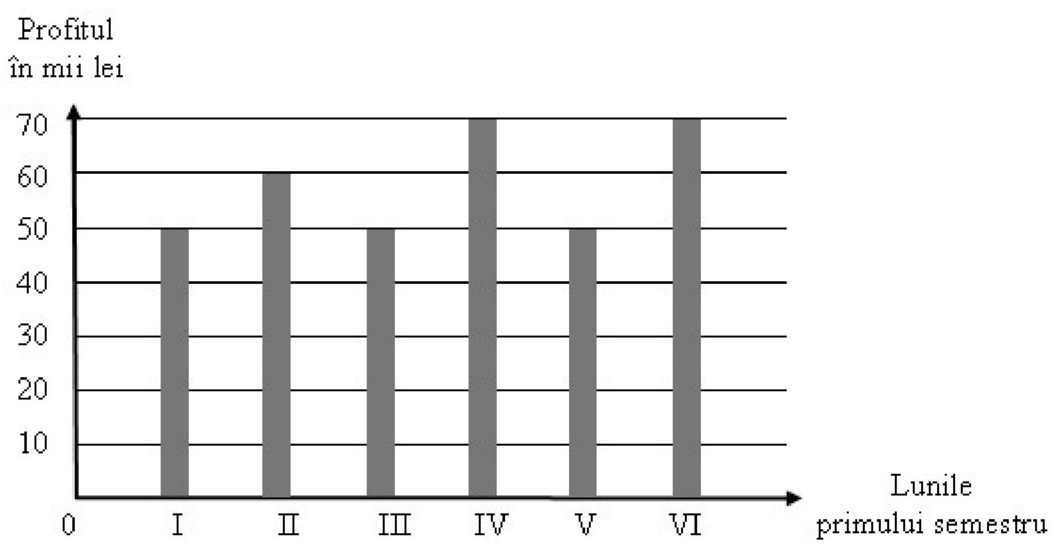
b) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi diagrama (cu bare verticale) corespunzătoare.


Număr de elevi
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Nota

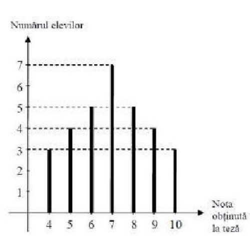
4) Toţi elevii unei clase au susţinut teza la matematică. Rezultatele obţinute sunt reprezentate în graficul de mai jos. Conform graficului, clasa are un număr de ... elevi.



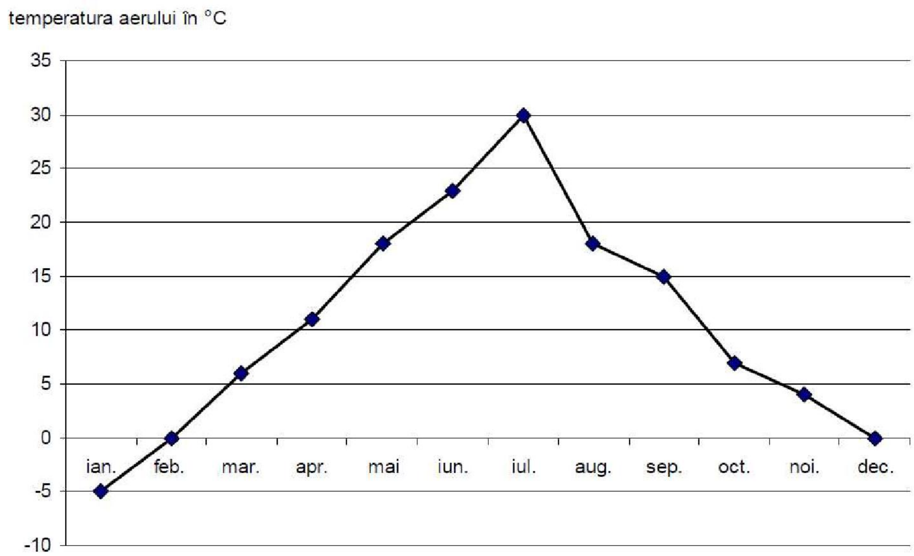
5) În graficul de mai jos sunt reprezentate profiturile lunare ale unei firme în primul semestru al anului 2011. Profitul total realizat de firmă în această perioadă de timp este egal cu ...... mii lei.



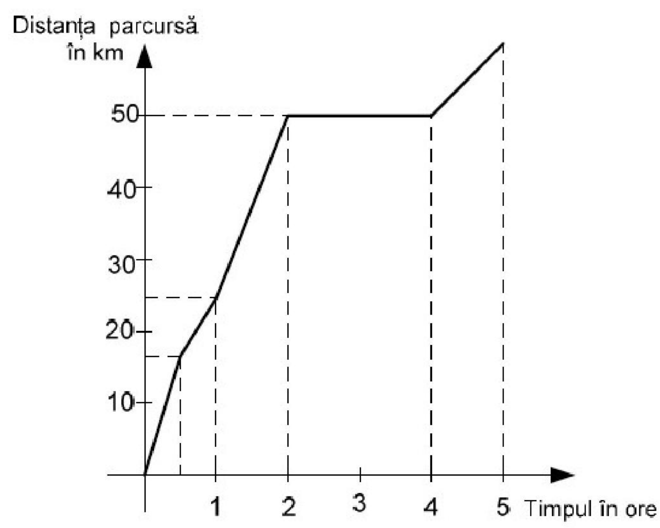
6) În graficul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obţinute de toţi elevii unei clase la teza din semestrul al II-lea la matematică. Numărul elevilor care au obţinut note mai mari decât 7 este



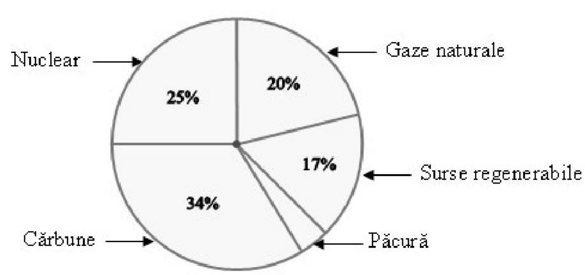
7) Pentru graficul de mai jos, diferenţa dintre temperatura cea mai mare şi cea mai mică este de .... °.



8) Figura alăturată reprezintă graficul deplasării unui vehicul pe parcursul a cinci ore. În această perioadă, vehiculul staţionează timp de ... ore.



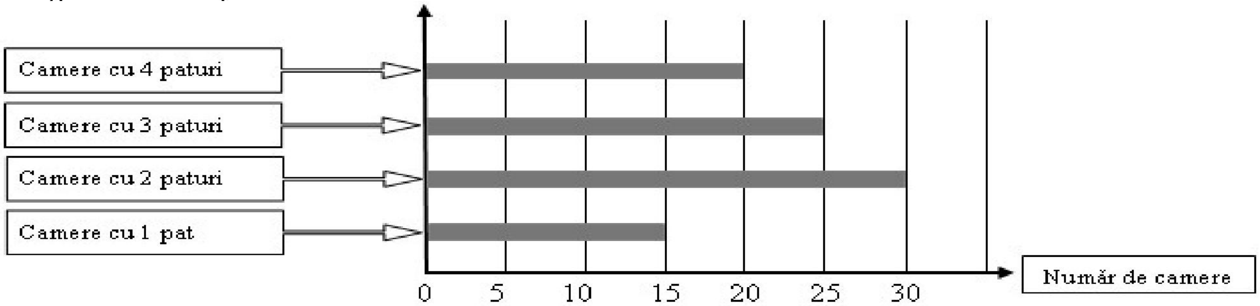
9) Energia electrică furnizată unui oraş a fost produsă din următoarele surse:



Aflaţi procentul reprezentat de păcură şi completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Felul energiei	**Cărbune**	**Păcură**	**Surse regenerabile**	**Gaze naturale**	**Nuclear**
Procente					

5) Diagrama de mai jos arată numărul de camere ale unui hotel.



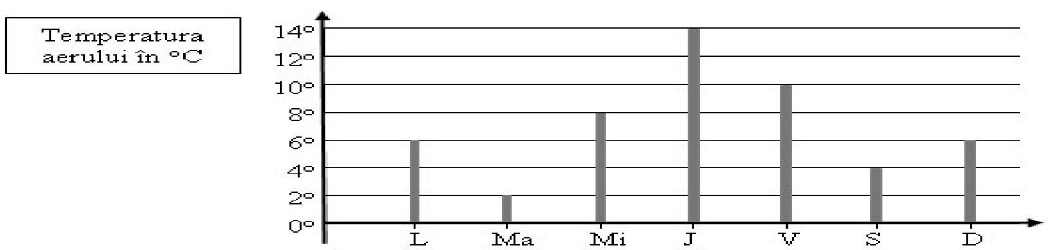
a) Completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Felul camerei	**cu un pat**	**cu 2 paturi**	**cu 3 paturi**	**cu 4 paturi**
Număr de camere				

b) Câte camere are acest hotel?

c) Câte locuri de cazare are acest hotel? (un pat = un loc)

6) În diagrama următoare sunt redate temperaturile măsurate pe parcursul unei săptămâni.



a) Completaţi tabelul următor cu datele din diagramă.

Ziua	**Luni**	**Marţi**	**Miercuri**	**Joi**	**Vineri**	**Sâmbătă**	**Duminică**
Temperatura aerului							

b) Calculaţi temperatura medie a săptămânii.

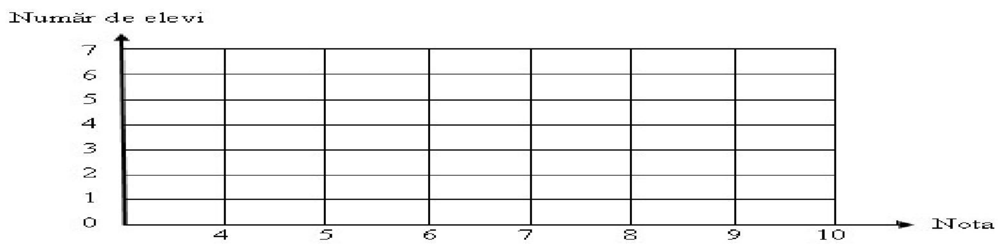
7) În tabelul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obţinute de toţi elevii unei clase la teza din semestrul I la matematică.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	1	4	5	6	7	4	2

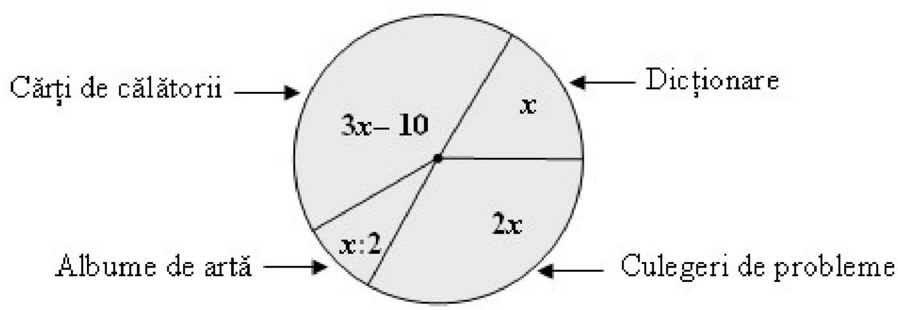
a) Calculaţi numărul de elevi ai acestei clase.

b) Calculaţi numărul de elevi care au obţinut note de 8, 9 sau 10.

c) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi diagrama (cu bare verticale) corespunzătoare.



8) Diagrama circulară de mai jos arată componenţa unei biblioteci. Ştim că numărul culegerilor de probleme este 40.



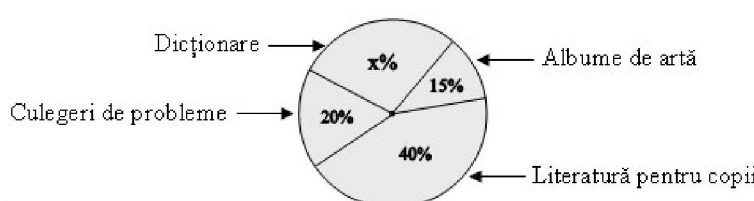
a) Completaţi tabelul următor.

Felul cărţii	**Culegeri de probleme**	**Dicţionare**	**Albume de artă**	**Cărţi de călătorii**
Nr. de cărţi				

b) Aflaţi numărul total de cărţi din bibliotecă.

c) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi o diagramă cu bare orizontale.

5) În diagrama alăturată este expusă, în procente, componenţa bibliotecii şcolii. Ştim că numărul culegerilor de probleme este 1200.



a) Aflaţi procentul reprezentat de dicţionare.

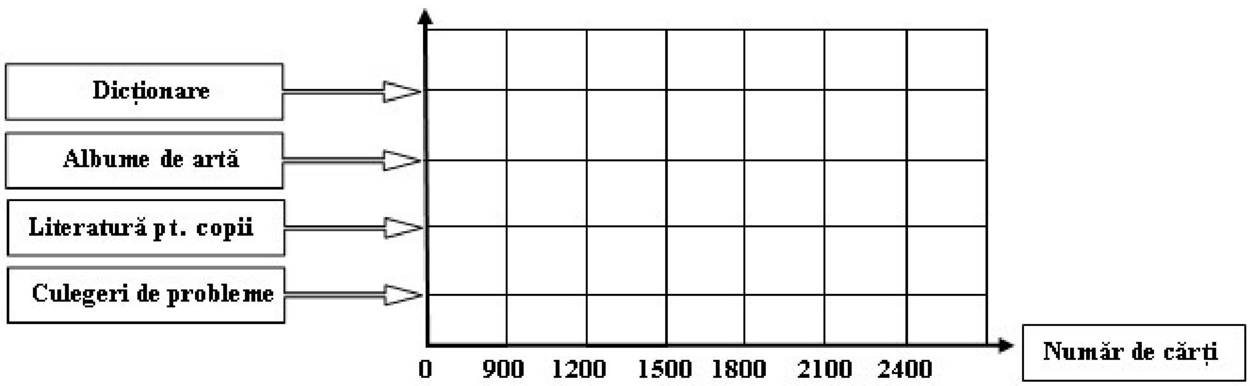
b) Completaţi tabelul următor.

Felul cărţii	**Culegeri de probleme**	**Literatură pentru copii**	**Albume de artă**	**Dicţionare**
Nr. de cărţi				

c)

Aflaţi numărul total de cărţi din bibliotecă.

d) Folosiţi datele din tabel şi alcătuiţi o diagramă cu bare orizontale.



5. Unitati de masura pentru lungime, arie, volum, capacitatea vaselor, masa, timp, valoare

o Unitati de masura standard; multiplii si submultiplii; transformari

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

1. UNITATI DE MASURA

1.Unităţi de măsură pentru lungime.

Stramosii babilonienilor si ai altor popoare din antichitate si-au framântat mintea ca sa stabileasca o metoda de *măsurare* a lungimilor de care se foloseau în viata de toate zilele. La acest rezultat s-a putut ajunge abia dupa ce a fost stabilit un sistem de numeratie si dupa ce oamenii s-au familiarizat cu linia dreapta si proprietatile ei. Dupa ce au stiut ca o parte din linia dreapta se asaza exact peste alta parte a ei, au înteles ca lungimile liniilor puteau fi comparate, stabilindu-se care este mai mare si chiar *de cate ori.*

Pentru aceasta operatie era de ajuns sa stabileasca o unitate de lungime, iar aceasta unitate nu era greu de gasit : putea fi *palma, degetul, cotul, braţul întreg, piciorul, pasul*, unitatea aleasa fiind indicata de însasi marimea ce trebuia masurata. Numai ca aceste unitati de masura desi aveau numiri asemanatoare în majoritatea zonelor, nu erau fixe si nici aceleasi peste tot. Tocmai aceste deosebiri care îngreunau operatiile comerciale dintre diferite state au condus la introducerea unei unitati interna.ionale de masurare a lungimilor, unitate care a fost numita *metru*. Aceasta noua unitate de lungime, cu multipli si submultipli exprimati în sistemul de numeratie zecimal, a fost introdusa mai întâi în Franta, în 1795, adica dupa Revolutia franceza. Tara noastra a fost una dintre primele tari care au adoptat sistemul metric, anume prin legea din 1864, care urma sa se aplice începând din anul 1866. Dar chiar înainte de aceasta data, legaturile noastre culturale cu Franta au facut ca, în cartile tiparite la noi în tara, sa fie explicata odata cu unitatile de masura folosite din stramosi si notiunea, foarte moderna pe atunci, de metru. Astfel în cartea de *Geometrie* tiparita de Gheorghe Asachi la Iasi în 1838 gasim : « Unitatea legiuta a masurei pentru lungimi este stânjenul, deci a masura o linie este a cauta câti stânjeni cuprinde, sau fractii ale stânjenului. Însa, desi guvernurile se ângrijesc de a pastra pururea

aceeasi lungime a stânjenului, totusi aceasta masura, neatârnând de vreo baza statornica, se schimba de la loc ai epoca, de aceea urmeaza sminteli între numaratoarea msurilor vechi si celor noi. Pentru a se feri de asemenea sminteli vatama.toare, în epoca reformelor, în Franta s-a determinat o masura neschimbatoare, în urma unor mari operatii astronomice prin care s-a hotarât împrejmurimea Pamântului, împartind departarea de la pol la ecuator, sau patrariul de cerc, în zece milioane de parti din care una au luat-o drept metru ».

Definitie

Metrul este lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timp de 1/299.792.458 dintr-o secundă.

Vom nota prin litera *m* metrul. Masuratorile efectuate au urmat sa se extinda si asupra lungimilor mai mici sau mai mari decât metrul dând nastere la noi categorii de unitati de masura numite *submultiplii* metrului respectiv *multiplii* metrului.

Submultiplii metrului:

-decimetrul (*dm*) = 0,1 m (1m=10dm)

-centimetrul (*cm*) = 0,1 dm = 0,01 m (1m=100cm)

-milimetrul (*mm*) = 0,1 cm =0,01 dm = 0,001m (1m=1000mm)

Multiplii metrului:

-decametrul (*dam*) = 10 m

-hectometrul (*hm*) = 10 dam = 100 m

-kilometrul (*km*) = 10 hm = 100 dam = 1000 m

2.Unităţi de măsură pentru arie.

Unitatea de măsură pentru arii este aria unui patrat cu latura de 1 m, arie numita un *metru pătrat* (se noteaza 1 m^2).

Deoarece s-a stabilit ca unitatea de masura a ariei sa fie aleasa ca fiind aria unui patrat de latura egala cu o unitate de lungime, spunem ca aria este o marime derivata, având la baza lungimea.

Multiplii sunt:

1 dam^2=100 m^2

1 hm^2=100 dam^2 = 10000 m^2

1 km^2=100 hm^2 = 10000 hm^2 = 1000000 m^2

Submultiplii sunt:

1 dm^2 = 0,01 m^2

1 cm^2 = 0,01 dm^2 = 0,0001 m^2

1 mm^2= 0,01 cm^2 = 0,0001 dm^2 = 0,000001 m^2

3.Unități de măsură pentru volum.

Unitatea de mãsurã pentru volum este volumul unui cub cu muchia de 1 m, volum numit un *metru cub* (se noteaza 1 m^3)

Analog definim multiplii si submultiplii metrului cub, adica:

Multiplii sunt:

1 dam^3=1000 m^3

1 hm^3 = 1000 dam^3 = 1 000 000 m^3

1 km^3 = 1000 hm^3 = 1 000 000 dam^3 = 1 000 000 000 m^3

Submultiplii sunt:

1 dm^3=0,001 m^3

1 cm^3=0,001 dm^3 = 0,000001 m^3

1 mm^3=0,001 cm^3 = 0,000001 dm^3 = 0,000000001 m^3

Cum determinam volumul unui corp solid, cu aproximatie?

Se scufunda corpul într-un vas gradat cu lichid, astfel încât sa fie acoperit complet. Se citeste pe gradatia de nivel volumul lichidului înainte si dupa scufundare ; diferenta dintre aceste volume este chiar volumul corpului respectiv.

4.Unități de măsură pentru capacitate

Unitatea de mãsurã pentru capacitate este *litrul* si este *echivalentul unui* dm^3 *de apă*. Prin notatia 1 *l* întelegem un litru. Avem deci egalitatea 1 *l*=1 dm^3 .

Multiplii sunt:

1 *decalitru* (1 *dal*) = 10 *l*

1 *hectolitru* (1 *hl*) = 100 *l*

1 *kilolitru* (1 *kl*) = 1000 *l*

Submultiplii sunt:

1 *decilitru* (1 *dl*) = 0,1 *l*

1 *centilitru* (1 *cl*) = 0,1 *dl* = 0,01 *l*

1 *mililitru* (1 *ml*) = 0,1 *cl* = 0,01 *dl* = 0,001 *l*

5.Unităţi de măsură pentru masă.

Masa unui centimetru cub de apa distilata, la temperatura de 40 Celsius s-a considerat ca fiind 1 *gram* si s-a notat prin 1 *g*. S-a stiut ca la aceasta temperatura densitatea apei este maxima. Cantitatile mai mari decât gramul dau nastere urmatoarelor categorii:

Multiplii gramului:

10 g=1 *decagram* (se noteaza 1 *dag*)

100 g= 1 *hectogram* (se noteaza 1 *hg*)

1000 g=1 *kilogram* (se noteaza 1 *kg*)

100000 g=1 *chintal* (se noteaza 1 *q*)

1000000 g=1 ton. (se noteaza 1 *t*)

Submultiplii gramului:

1 g=10 *decigrame* (se noteaz. 10 *dg*)

1g=100 *centigrame* (se noteaz. 100 *cg*)

1g=1000 *miligrame* (se noteaz. 1000 *mg*)

6.Unităţi de măsură pentru timp.

Ziua solară este intervalul de timp care trece din momentul când soarele trece la meridianul locului (când are înaltimea deasupra orizontului maxima, ceea ce popular se zice amiaza) pâna a doua zi când trece din nou la meridianul locului.

Ziua siderală este intervalul de timp scurs între doua treceri consecutive ale unei stele fixe la meridianul locului si este egala cu timpul unei rotatii complete a Pamântului în jurul axei polilor .

Între ziua solara si cea siderala este o diferenta de aproximativ 4 minute. Aceasta diferenta, cu trecerea mai multor zile, se acumuleaza si se ajunge la situatia ca într-o zi soarele sa treaca la meridian (sa fie miezul zilei) la ora siderala 12, pentru ca dupa sase luni, tot la ora siderala 12, soarele sa fie la meridian în partea cealalta, adica sa fie miezul noptii.

Ziua solară mijlocie se poate defini ca fiind intervalul de timp în care un mobil se misca uniform (miscarea unui mobil este uniforma daca între diferite intervale de timp egale parcurge distante egale) astfel încât este când înaintea, când în urma soarelui (în intervale de timp nu prea mari).

O zi solara mijlocie se împarte în *24 de ore*; ora în *60 de minute*; minutul în *60 de secunde*; intervalele mai mici ca o secunda se masoara cu zecimea, sutimea etc., de secunda. Aceasta împartire pentru unitatile de timp, pastreaza împartirea sexagesimala, ramasa de la babilonieni.

Sapte zile alcatuiesc *săptămâna*, 4 saptamâni alcatuiesc *luna,* 12 luni alcatuiesc *anul*, care este intervalul de timp în care Pamântul face o rotatie completa în jurul Soarelui. El are 365,2422 zile. Deoarece nu are un numar întreg de zile s-a stabilit ca anul calendaristic sa aiba 365 de zile iar din 4 în 4 ani sa aiba 366 de zile. Anul cu 366 de zile se mai numese s an *bisect*. Lunile : ianuarie, martie, mai, iulie, august, octombrie si decembrie au câte 31 de zile ; lunile : aprilie, iunie, septembrie si noiembrie au câte 30 zile, iar luna februarie are 28 de zile (în anul bisect 29 zile).

Globul Pamântesc se împarte în 24 de fusuri orare, un fus fiind cuprins între doua meridiane ale caror longitudine difera prin 150.

6. Elemente de geometrie

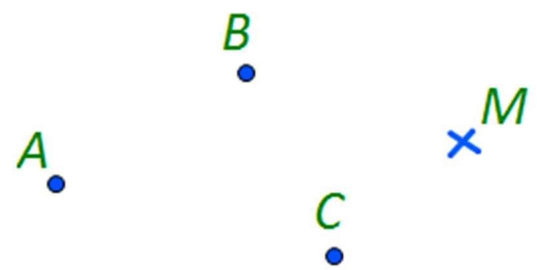
o Punctul, dreapta, semidreapta, segmentul, linia curba, linia franta

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Punctul. Dreapta. Planul(NU se cere)

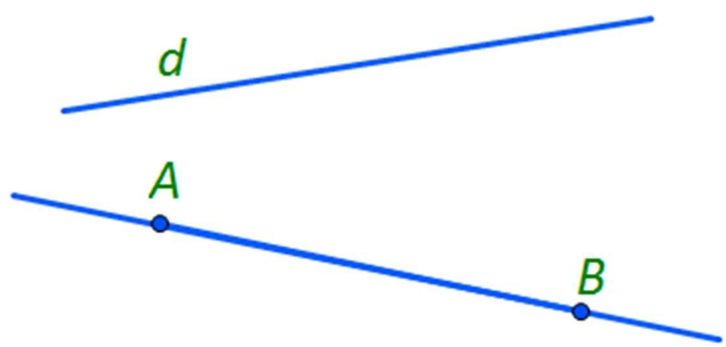
Punctul, dreapta și planul sunt noțiuni fundamentale ale geometriei plane. Pentru aceste noțiuni nu există definiții precise, dar le putem descrie prin exemple.

Un **punct** poate fi comparat cu urma lăsată pe hârtie de înțepătura unui vârf de ac. Punctele se reprezintă grafic prin buline sau cruciulițe și se notează cu litere mari: A, B, C, M, etc.



Punctele A, B, C, M

O **dreaptă** poate fi descrisă ca un fir de ață bine întins. O dreaptă este nemărginită, adică poate fi prelungită la nesfârșit, la ambele capete. O dreaptă este formată din mai multe puncte. Dreptele se notează cu litere mici: *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Dacă fixăm pe o dreaptă două puncte A și B, atunci dreapta se va nota AB.



Dreptele d și AB

Axioma dreptei *. Două puncte distincte determină o dreaptă.

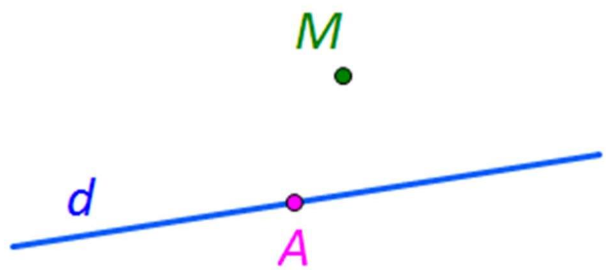
Așadar, axioma dreptei ne spune că fiind date două puncte distincte, putem duce o singură dreaptă care să treacă prin ele.

**O axiomă este un enunț ce exprimă un adevăr matematic evident, acceptat fără demonstrație*.

Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă

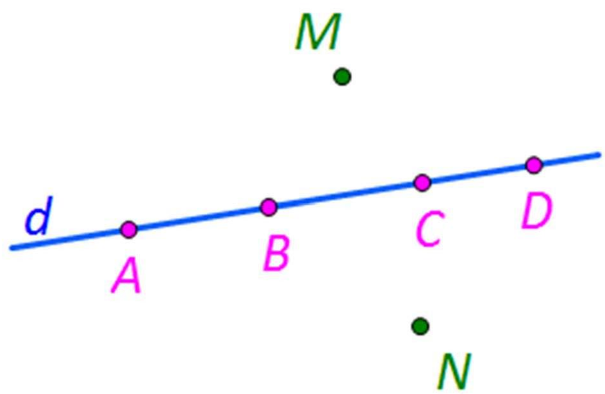
Un punct poate avea două poziții față de o dreaptă:

- fie este situat *pe dreaptă,* iar în acest caz spunem că punctul *aparține* dreptei; în figura de mai jos, punctul A aparține dreptei *d* și vom scrie astfel: A $\in$ *d*
- fie este situat *în exteriorul dreptei*, iar în acest caz vom spune că *nu aparține* dreptei; în figura de mai jos, punctul M nu aparține dreptei *d* și notăm astfel: M $\notin$ *d*.



Trei sau mai multe puncte situate pe aceeași dreaptă se numesc **puncte coliniare.** În caz contrar, ele se vor numi puncte necoliniare.

Priviți figura de mai jos și încercați să identificați trei puncte coliniare și trei puncte necoliniare.

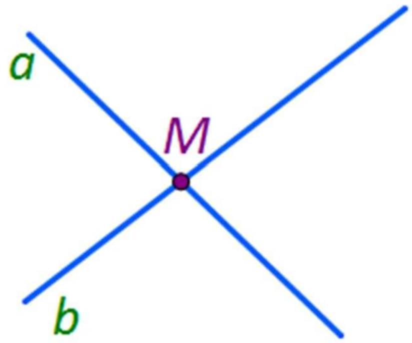


- Punctele A, B, C sunt puncte coliniare;
- Punctele B, C, D sunt puncte coliniare;
- Punctele A, B, M sunt puncte necoliniare;
- Punctele M, B, N sunt puncte necoliniare;
- Punctele C, D, N sunt puncte necoliniare.

Poziții relative a două drepte în plan

Două drepte distincte pot fi:

- **concurente**– dacă au un punct comun; în figura de mai jos, dreptele *a* și *b* au un punct comun M și vom spune că ele *sunt concurente în punctul M* sau că *se intersectează în punctul M;*
- **paralele**– dacă nu au niciun punct comun; în figura de mai jos, dreptele *d* și *e* sunt paralele,

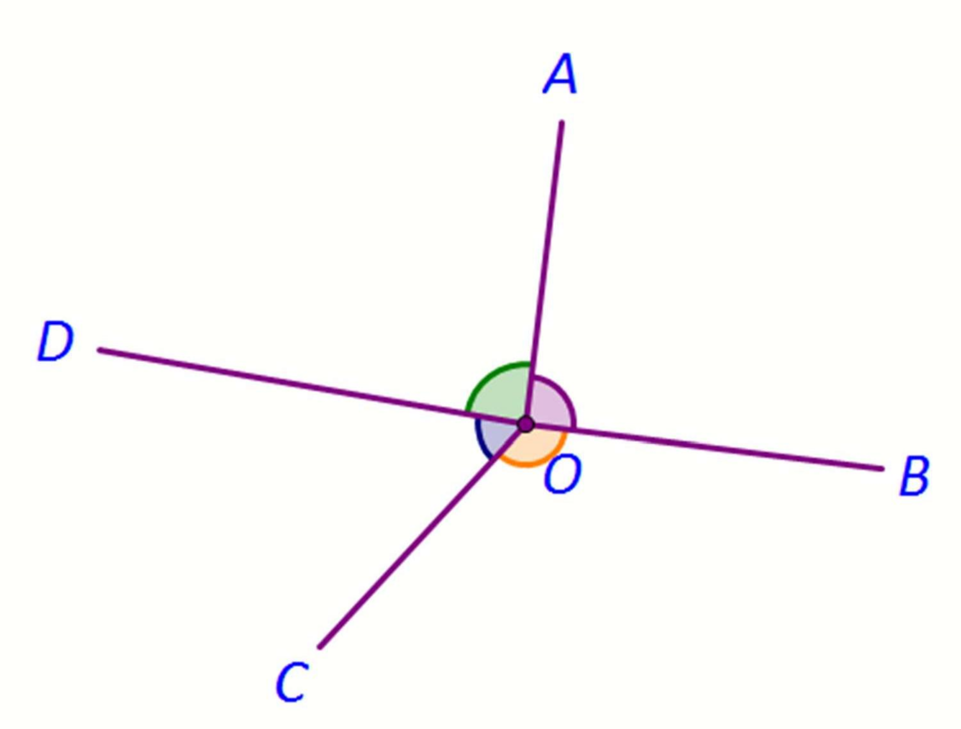


Planul poate fi descris ca o suprafață netedă, care se poate extinde la nesfârșit, în toate direcțiile. De exemplu planul mesei, planul tablei, planul peretelui, etc. Planul este format din puncte și este nemărginit. Planele se notează cu litere grecești: α, β, γ și se reprezintă astfel:

Planul alfa

o **Unghi**: definitie, notatii, elemente; interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi; masura unui unghi; clasificare

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia



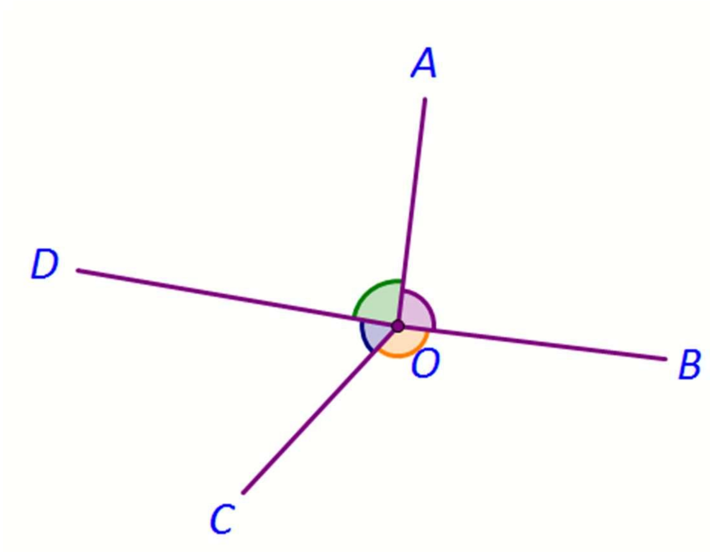
Unghiuri in jurul unui punct

Unghiurile formate în jurul unui punct sunt unghiuri care au vârful comun, interioarele disjuncte (care nu au puncte comune, vezi figura de mai jos) şi orice punct al planului este situat pe o latură sau în interiorul unui unghi.

Cu alte cuvinte, ele ocupă tot "spaţiul" din jurul unui punct. Unghiurile în jurul unui punct au o proprietate importantă:

Proprietatea unghiurilor formate in jurul unui punct

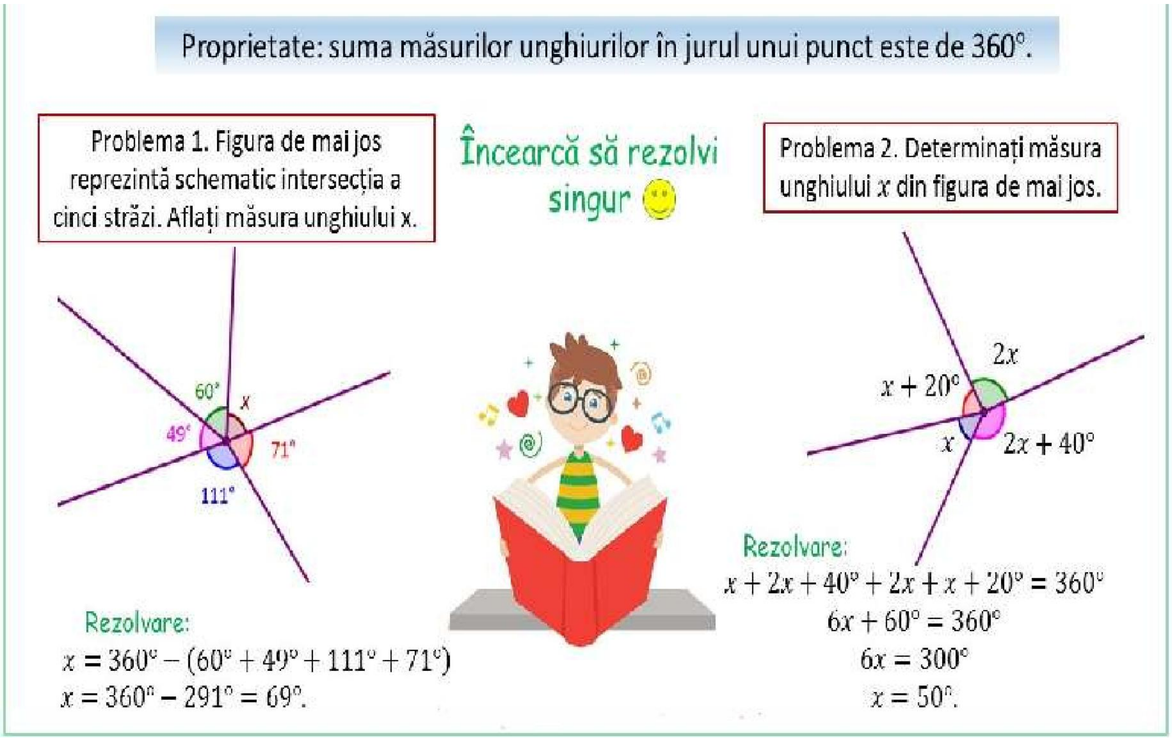
Suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este de 360 de grade.

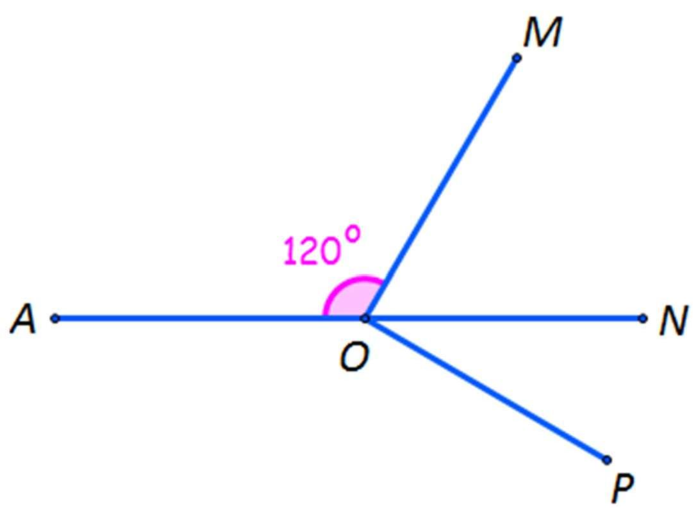


Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt unghiuri în jurul unui punct

$AOB+BOC+COD+DOA=360^o$

Probleme rezolvate cu unghiuri în jurul unui punct



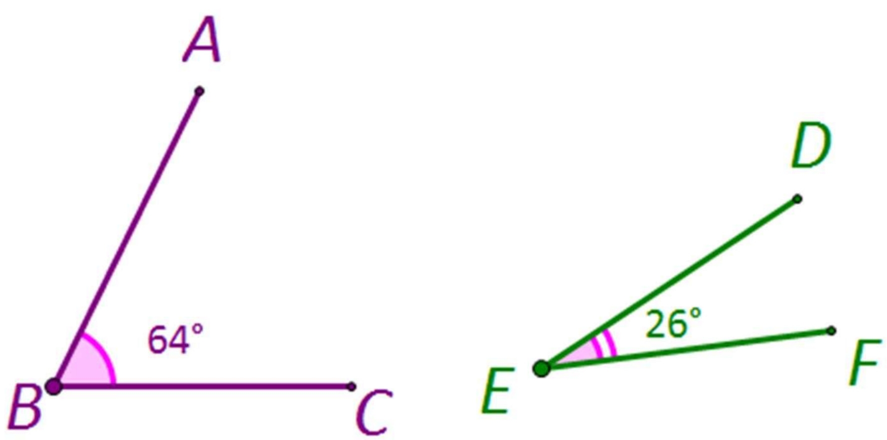


Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare. Unghiuri adiacente

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Unghiurile complementare sunt unghiurile care au suma măsurilor egală cu 90°.

Fiecare dintre unghiuri se numește complementul celuilalt. În figura de mai jos, unghiul ABC are măsura egală cu 64°, iar unghiul DEF are măsura egală cu 26°. Împreună, cele două unghiuri au 90° și se numesc unghiuri complementare.

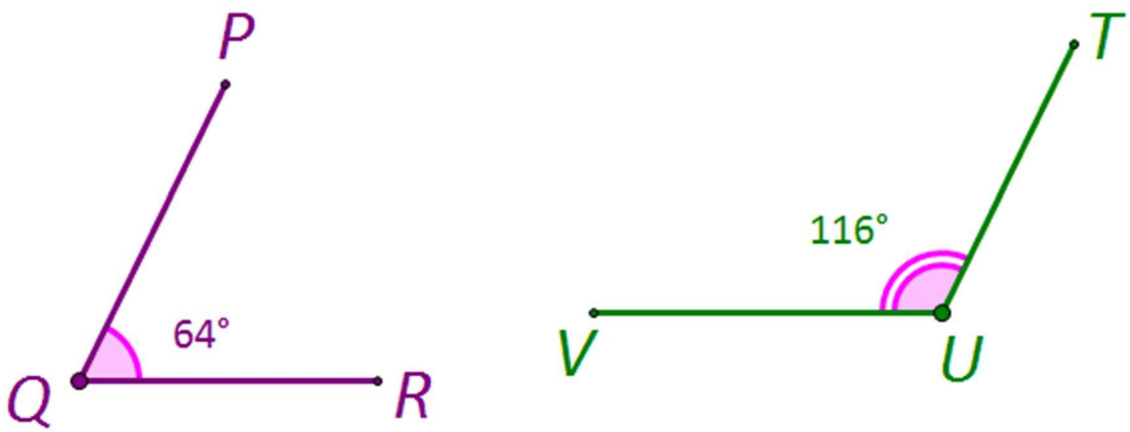


Unghiurile ABC și DEF sunt unghiuri complementare

\widehat{ABC}+\widehat{DEF}=90^o*ABC*+*DEF*=90*o*

Unghiurile suplementare sunt unghiurile care au suma măsurilor egală cu 180°.

Fiecare dintre unghiuri se numește suplementul celuilalt. În figura de mai jos, unghiul PQR are măsura egală cu 64°, iar unghiul TUV are măsura egală cu 116°. Împreună, cele două unghiuri au 180° și se numesc unghiuri suplementare.



Unghiurile PQR și TUV sunt unghiuri suplementare

$PQR+TUV=90^o$

Unghiurile adiacente sunt unghiurile care au vârful comun, o latură comună și interioarele lor nu au puncte comune.

În figura 1 de mai jos, unghiurile MON și NOP sunt **adiacente complementare**, pentru că au vârful O comun, latura NO comună și suma măsurilor lor este de 90°.
În figura 2 de mai jos, unghiurile SOG și SOL sunt **adiacente suplementare**, pentru că au vârful O comun, latura SO comună, iar suma măsurilor lor este de 180°.

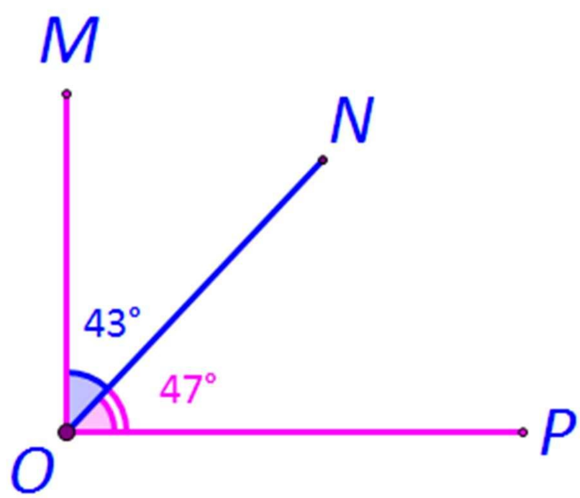


Fig. 1. Unghiurile MON și NOP sunt adiacente complementare

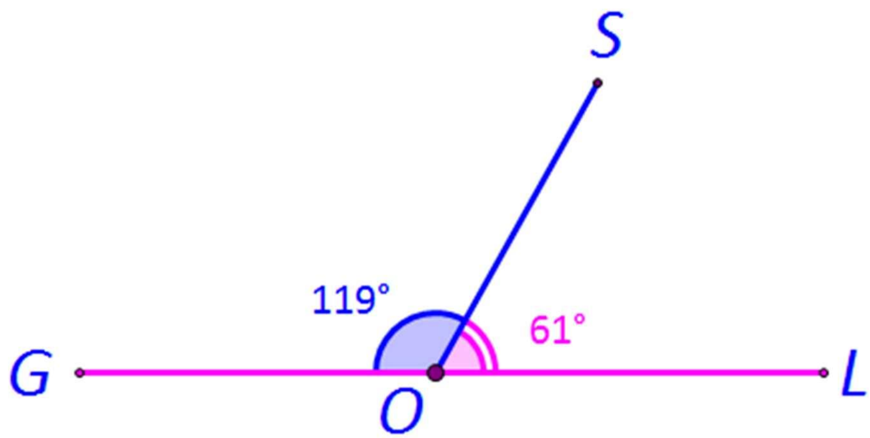


Fig. 2. Unghiurile SOG și SOL sunt adiacente suplementare

Proprietăți ale unghiurilor complementare și suplementare

- Dacă două unghiuri au același complement, atunci ele sunt congruente.
- Dacă două unghiuri au același suplement, atunci ele sunt congruente.
- Dacă două unghiuri sunt complementare și congruente, atunci fiecare va avea măsura egală cu 45^o (pentru că $90^o:2=45^o$).
- Dacă două unghiuri sunt suplementare și congruente, atunci fiecare va avea măsura egală cu 90^o (pentru că $180^o:2=90^o$).

Probleme rezolvate cu Unghiuri complementare, unghiuri suplementare

1. Calculați complementul unui unghi cu măsura de 38^o.

Rezolvare. Notăm cu C complementul unghiului dat.
$C+38^o=90^o$
$C=90^o-38^o$
$C=52^o$.

2. Calculați suplementul unui unghi cu măsura de 103^o.

Rezolvare. Notăm cu S suplementul unghiului dat.
$S+103^o=180^o$

$S=180^o-103^o$
$S=77^o$.

3. Aflați măsurile a două unghiuri suplementare, știind că măsura unuia dintre ele este de două ori mai mare decât măsura celuilalt.

Rezolvare. Notăm cu A și B cele două unghiuri.
$A+B=180^o$ și $A=2B$
$2B+B=180^o$
$3B=180^o$
$B=180^o:3$
$B=60^o$
$A=2B=2\cdot60^o=120^o$

Acum e rândul tău Încearcă să rezolvi singur problemele de mai jos.

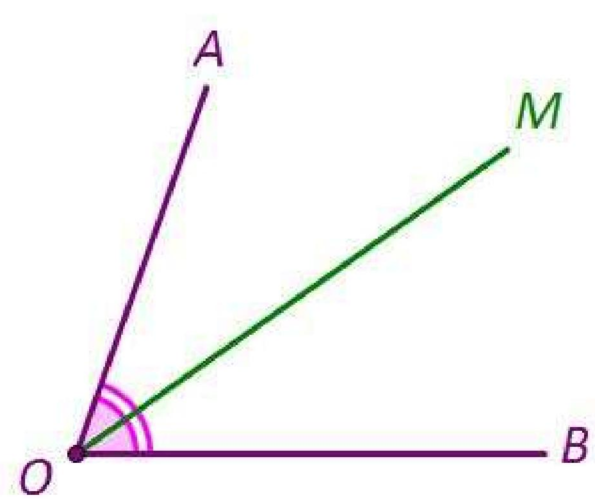
Temă:

1. Calculați complementul unui unghi cu măsura de 41^o.
2. Calculați suplementul unui unghi cu măsura de 98^o.

Bisectoarea unui unghi

Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă situată în interiorul unghiului, cu originea în vârful unghiului și care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.

Cu alte cuvinte, bisectoarea unui unghi împarte unghiul în două unghiuri cu măsurile egale. În figura de mai jos, semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB.



OM este bisectoarea unghiului AOB

$\measuredangle AOM \equiv \measuredangle MOB$

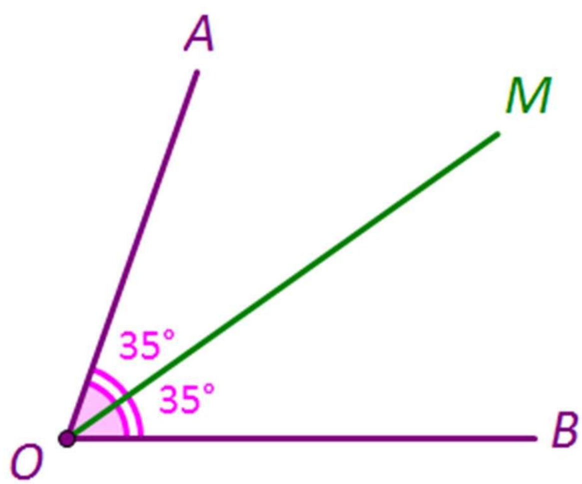
Unghiurile AOM și MOB sunt *unghiuri adiacente* congruente (au vârful comun, o latură comună OM, iar celelalte două laturi OA, respectiv OB sunt situate de o parte și de alta a laturii comune).

Pentru recapitularea noțiunilor despre unghiuri învățate în clasa a V-a și probleme rezolvate cu unghiuri, click aici.

Probleme rezolvate

Problema 1. Fie unghiul AOB cu măsura egală cu 70^{o} și OM bisectoarea acestuia. Aflați măsurile unghiurilor AOM și MOB.

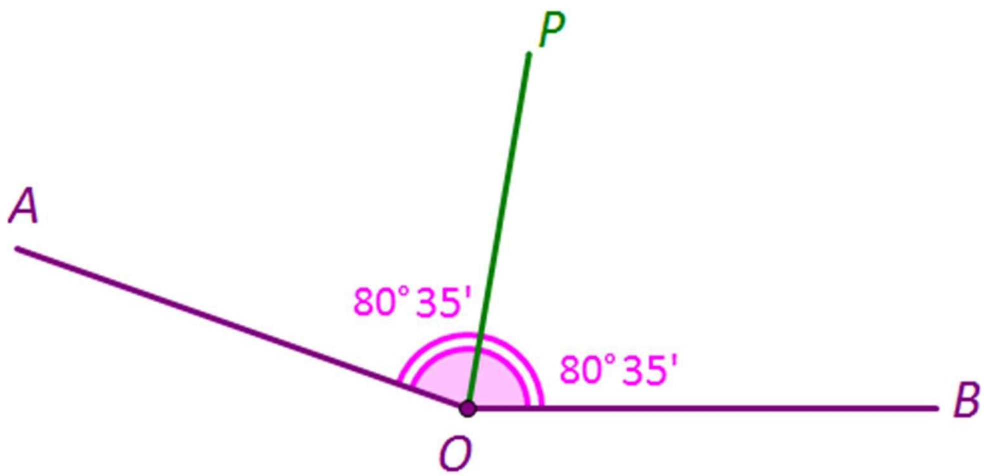
Rezolvare:



Dacă OM este bisectoare, atunci aceasta împarte unghiul AOB în două unghiuri congruente (cu aceeași măsură).
Prin urmare $\measuredangle AOM = \measuredangle MOB = \measuredangle AOB : 2 = 70^{o} : 2 = 35^{o}$.

Problema 2. Se consideră unghiul AOB și OP bisectoarea sa. Știind că măsura unghiului AOP este de $80^{o}35'$, aflați măsura unghiului AOB.

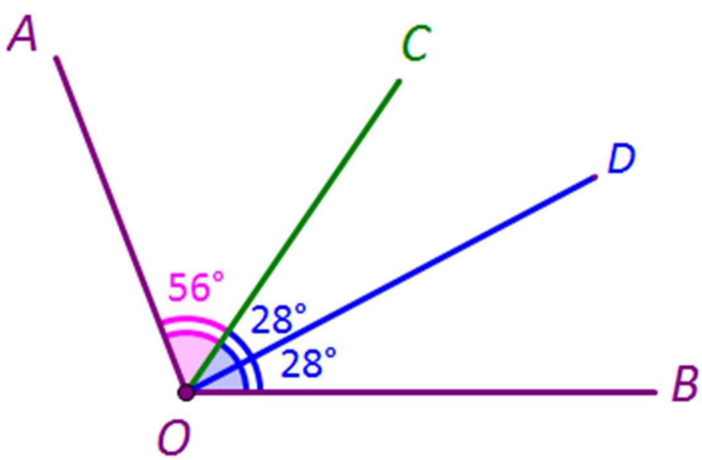
Rezolvare:



Dacă ∡AOP = $80^o35'$, iar OP este bisectoare, atunci unghiul POB va avea aceeași măsură cu unghiul AOP. Deci ∡POB = ∡AOP = $80^o35'$. ∡AOB= ∡AOP+ ∡POB= $80^o35'$ + $80^o35'$ = $80^o35' \cdot 2$= $160^o70'$= $161^o10'$. La ultimul calcul am ținut cont de faptul că un grad are 60 de minute: $1^o = 60'$ și am transformat cele 70 de minute în grade și minute: $70' = 60' + 10' = 1^o + 10' = 1^o10'$. Așadar, $160^o70' = 161^o10'$.

Problema 3. Fie unghiul AOB cu măsura de 112^o. Se știe că OC este bisectoarea unghiului AOB, iar OD este bisectoarea unghiului COB. Aflați măsura unghiului COD.

Rezolvare:



Dacă OC este bisectoarea unghiului AOB, atunci ∡AOC=∡COB=∡AOB : 2 = 112^o:2 =56^o. Dacă OD este bisectoarea unghiului COB, atunci ∡COD=∡DOB=∡COB : 2 = 56^o:2 =28^o.

Acum e rândul tău Încearcă să rezolvi singur problemele de mai jos. Dacă ai reușit, scrie-ne și nouă rezultatele obținute într-un comentariu. La final te invit să rezolvi și **Testul online.**

Temă:

Problema 1. Fie unghiul AOB cu măsura de 86^o şi OS bisectoarea sa. Aflaţi măsura unghiului AOS.
Problema 2. Fie unghiul AOB şi OC bisectoarea sa. Ştiind că unghiul COB are măsura egală cu $23^o25'$, aflaţi măsura unghiului AOB.
Problema 3. Fie unghiul AOB cu măsura de 124^o şi OM bisectoarea sa. Dacă ON este bisectoarea unghiului MOB, aflaţi măsura

o **Poligoane**:
Triunghiul
- Definitie, elemente; clasificare; perimetru; suma masurilor unghiurilor unui triunghi

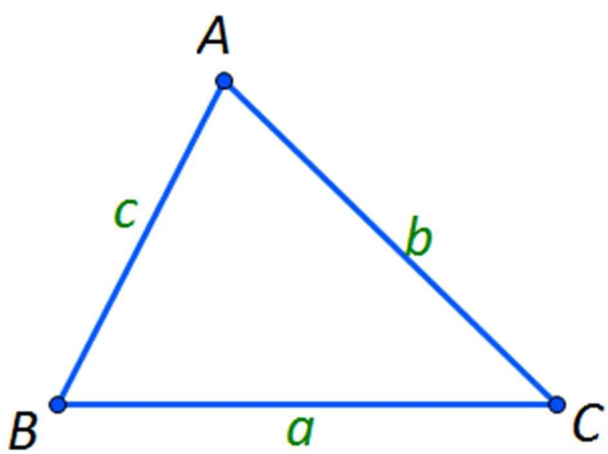
Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Triunghiul: elemente, clasificarea triunghiurilor și proprietăți

Triunghiul este o figură plană închisă, formată din trei laturi și trei vârfuri. Cele trei laturi ale unui triunghi sunt segmente, iar vârfurile sunt punctele de intersecție ale laturilor.

Vârfurile unui triunghi se notează cu litere mari: A, B, C, M, N, … iar triunghiul se notează ținând cont de cele trei vârfuri.

În figura de mai jos avem triunghiul ABC, pe care îl putem nota astfel: ΔABC.



Triunghiul ABC

Cele trei laturi ale triunghiului sunt segmentele AB, BC și AC, care se pot nota și cu litere mici, ținându-se seama de vârful opus. Astfel, latura AB se opune vârfului C și aceasta se va nota cu litera *c*. Latura BC se opune vârfului A și o vom nota cu *a*, iar latura AC se opune vârfului B și o vom nota cu *b*.

Fiecare pereche de laturi ale triunghiului formează un unghi interior, prin urmare un triunghi are *trei unghiuri* interioare. Cele trei unghiuri ale triunghiului ABC sunt: ∡ABC (sau mai simplu ∡B), ∡BAC (sau ∡A), ∡ACB (sau ∡C).

Perimetrul unui triunghi

Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor. Dacă notăm laturile triunghiului ABC cu a, b şi c, atunci perimetrul triunghiului ABC este:

$$P = a+b+c.$$

Semiperimetrul triunghiului este jumătate din perimetru:

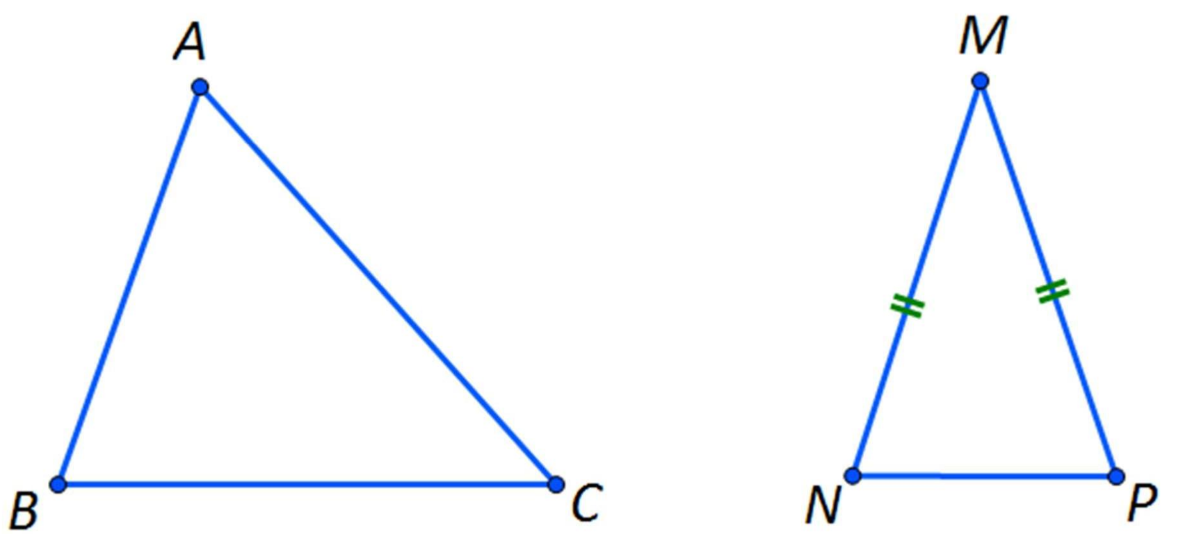
$$s = P/2 = (a+b+c) : 2$$

Clasificarea triunghiurilor

1. Clasificarea triunghiurilor în funcție de laturi

În funcție de lungimile laturilor, triunghiurile pot fi:

- *triunghi oarecare (scalen)* – are laturile de lungimi diferite;
- *triunghi isoscel* – are două laturi congruente; cea de-a treia latură se numeşte bază;
- *triunghi echilateral* – are toate cele trei laturi congruente.



Clasificarea triunghiurilor în funcție de laturi

Triunghiul ABC este oarecare.
Triunghiul MNP este isoscel: MN=MP.
Triunghiul DEF este echilateral: DE=EF=DF.

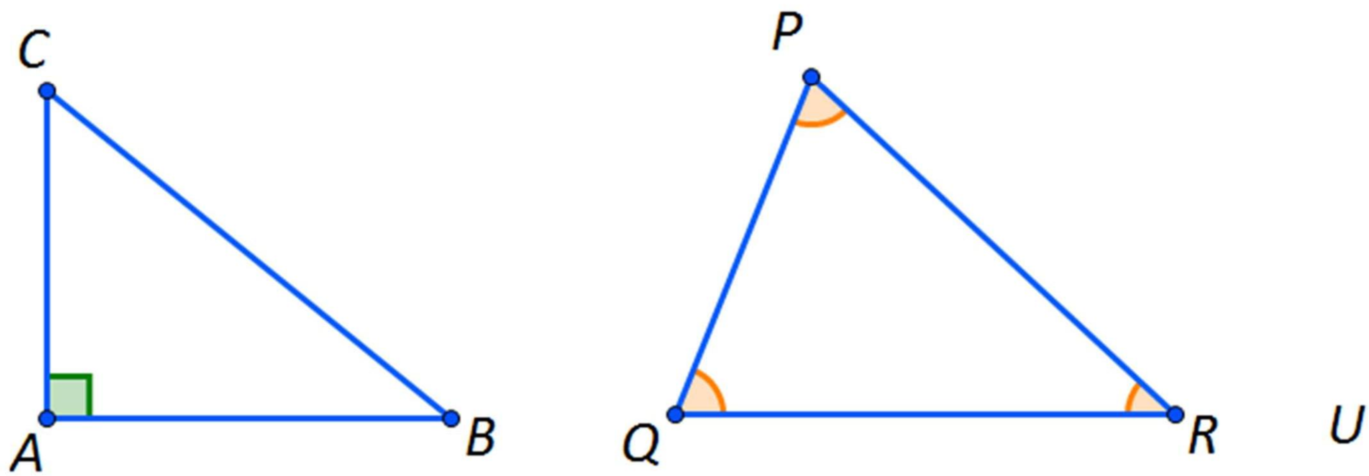
Important! Perimetrul unui triunghi echilateral cu latura *l* este:

$P = 3l.$

2. Clasificarea triunghiurilor în funcție de unghiuri

În funcție de măsurile unghiurilor, triunghiurile pot fi:

- *triunghi dreptunghic* – are un unghi drept (de 90 grade); laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*;
- *triunghi ascuțitunghic* – are toate unghiurile ascuțite (mai mici de 90 grade);
- *triunghi obtuzunghic* – are un unghi obtuz (mai mare de 90 grade).



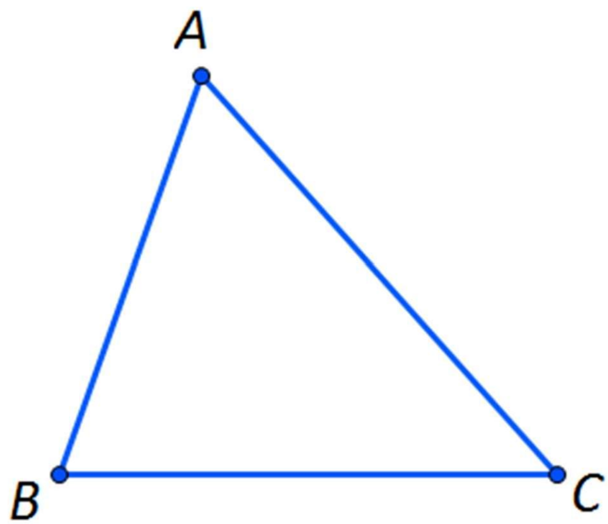
Clasificarea triunghiurilor în funcție de unghiuri

Triunghiul ABC este dreptunghic pentru că unghiul A este drept.
Catetele sunt AB și AC, iar ipotenuza este BC.
Triunghiul PQR este ascuțitunghic pentru că are toate unghiurile ascuțite.
Triunghiul TUV este obtuzunghic pentru că unghiul T este obtuz.

Proprietățile triunghiurilor

O primă proprietate se referă la suma unghiurilor unui triunghi:

P1. În orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor este de 180°.



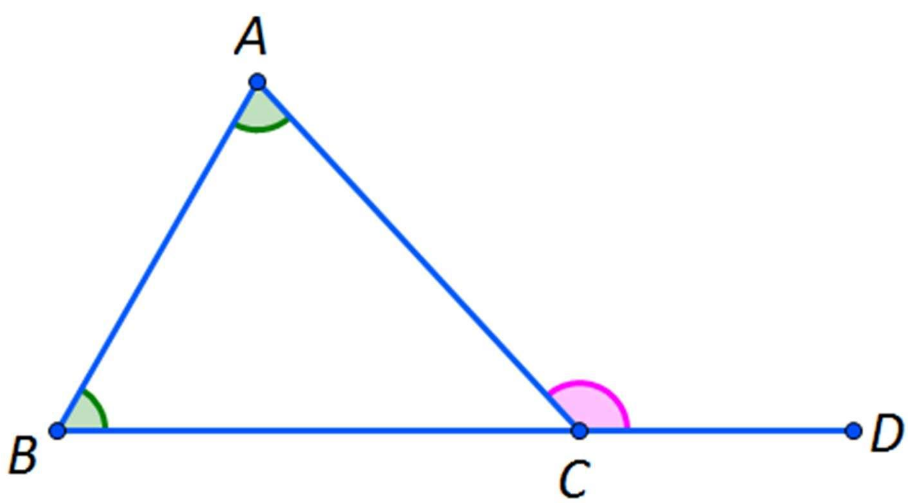
Suma unghiurilor unui triunghi

$$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C = 180^{\circ}$$

A doua proprietate se referă la unghiul exterior unui triunghi. Dar să vedem mai întâi ce este un unghi exterior.

Un *unghi exterior unui triunghi* este unghiul format de o latură a triunghiului cu prelungirea altei laturi. În figura de mai jos, unghiul ACD este exterior triunghiului ABC.

Un triunghi are șase unghiuri exterioare. Fiecare unghi exterior este suplementul unghiului interior alăturat.



Unghiul ACD este exterior triunghiului ABC

Și acum să vedem proprietatea referitoare la unghiul exterior unui triunghi:

P2. Un unghi exterior unui triunghi are măsura egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare, neadiacente cu el.

$$\measuredangle ACD = \measuredangle A + \measuredangle B.$$

Probleme rezolvate cu Triunghiul și proprietățile unui triunghi

Problema 1

Un triunghi are lungimile laturilor de 6 cm, 8 cm și 10 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

Rezolvare

P = 6+8+10 = 24 cm.

Problema 2

În triunghiul ABC, unghiul A are măsura de 67° și unghiul C are măsura de 83°. Aflați măsura unghiului B.

Rezolvare:

Într-un triunghi, suma măsurilor unghiurilor este de 180°.

$\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C = 180°$
$67°+\measuredangle B+83°=180°$
$150°+\measuredangle B=180°$
$\measuredangle B=180°-150°=30°$.

Problema 3

Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4. Aflați unghiurile triunghiului.

Rezolvare:

Notăm cu A, B, C cele trei unghiuri.

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A+B+C}{2+3+4} = \frac{180}{9} = 20$$

$$\frac{A}{2} = 20 \Longrightarrow A = 2 \cdot 20 = 40°$$

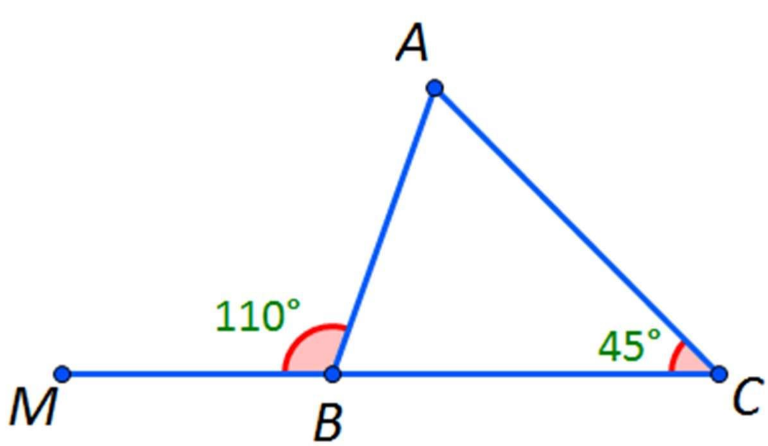
$$\frac{B}{3} = 20 \Longrightarrow B = 3 \cdot 20 = 60°$$

$$\frac{C}{4} = 20 \Longrightarrow C = 4 \cdot 20 = 80°.$$

Problema 4

În triunghiul ABC, unghiul C are 45°. Unghiul ABM este exterior triunghiului și are măsura de 110°. Aflați măsura unghiului A și măsura unghiului ABC.

Rezolvare:



Unghiurile ABM și ABC sunt suplementare:

∡ABM+∡ABC=180° ⟹ ∡ABC=180°-110°=70°.

∡A+∡ABC+∡C=180°
∡A+70°+45°=180°
∡A+115°=180°
∡A=180°-115°=65°.

- Linii importante in triunghi: inaltimea, bisectoarea, mediatoarea, mediana (definitie, proprietati, constructie)

- Ortocentrul, centrul cercului inscris in triunghi, centrul cercului circumscris triunghiului, centrul de greutate

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Linii importante in triunghi

1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi

Bisectoarea unui unghi este o semidreaptă situată în interiorul unghiului, cu originea în vârful unghiului și care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.

Cu alte cuvinte, bisectoarea împarte unghiul în două unghiuri cu măsurile egale. (Vezi și lecția Bisectoarea unui unghi.)

Proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi

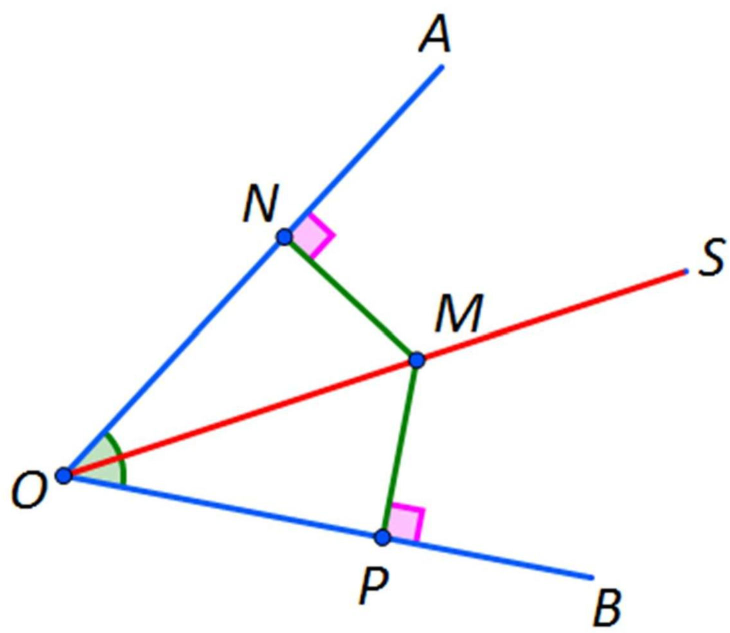
Orice punct situat pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

Are loc și reciproca acestei proprietăți:

Dacă un punct este egal depărtat de laturile unui unghi, atunci el este situat pe bisectoarea unghiului.

Dar ce înseamnă că un punct este egal depărtat de laturile unghiului? Înseamnă că distanțele de la acel punct la laturile unghiului sunt egale, prin distanță înțelegând perpendiculara din punctul respectiv pe laturile unghiului. În figura de mai jos, OS este bisectoarea unghiului AOB, iar M este un punct *oarecare*, situat pe această bisectoare. Ducem din M două perpendiculare: $MN \perp OA$ și $MP \perp OB$. Prin urmare, $d(M,OA)=MN$ și $d(M,OB)=MP$. Atunci, conform proprietății de mai sus, avem că $MN=MP$.

Dacă OS este bisectoarea $\measuredangle AOB$, $M \in OS$, $MN \perp OA$ și $MP \perp OB \Longrightarrow MN=MP$.

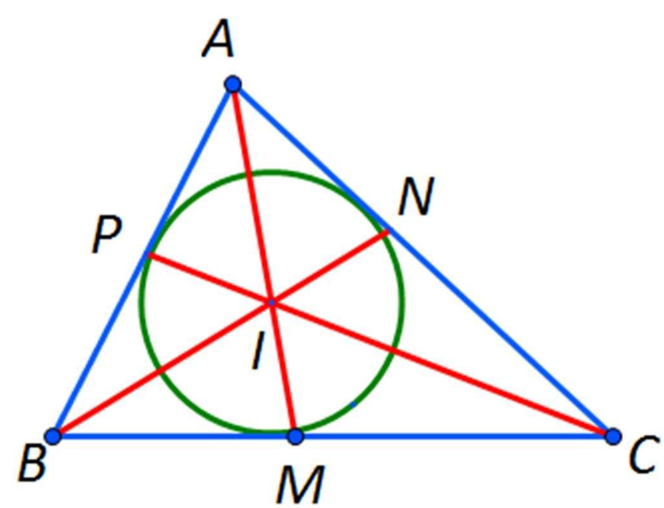


OS este bisectoarea unghiului AOB

Concurența bisectoarelor unui triunghi

Într-un triunghi putem construi trei bisectoare (pentru că un triunghi are trei unghiuri). Aceste bisectoare sunt concurente (se intersectează) într-un punct numit **centrul cercului înscris în triunghi** și care se notează de obicei cu I. Punctul I este egal depărtat de laturile triunghiului.

AM, BN și CP sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC

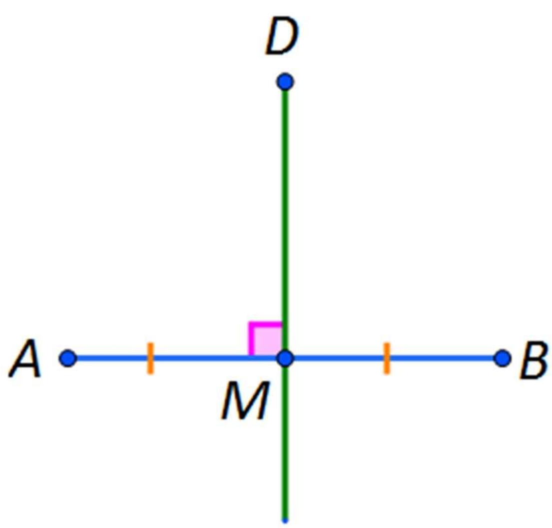


Concurenta bisectoarelor unui triunghi. Centrul cercului inscris

2. Mediatoarele laturilor unui triunghi

Mediatoarea unui segment este perpendiculara ridicată din mijlocul segmentului.

În figura de mai jos, M este mijlocul segmentului AB, DM⊥AB, prin urmare DM este mediatoarea segmentului AB. (Vezi și lecția Mediatoarea unui segment.)



Proprietatea punctelor situate pe mediatoarea unui segment

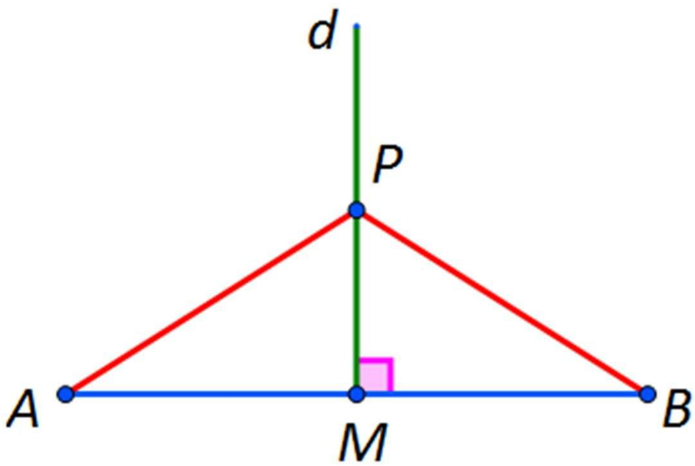
Orice punct situat pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

Este valabilă și reciproca acestei proprietăți:

Dacă un punct este egal depărtat de capetele unui segment, atunci el aparține mediatoarei segmentului.

În figura de mai jos, dreapta *d* este mediatoarea segmentului AB, iar P este un punct *oarecare* situat pe aceasta. Atunci distanța de la punctul P la A este egală cu distanța de la P la B: d(P,A)=d(P,B).

d– mediatoarea segmentului AB, $P \in d \Longrightarrow PA=PB$.

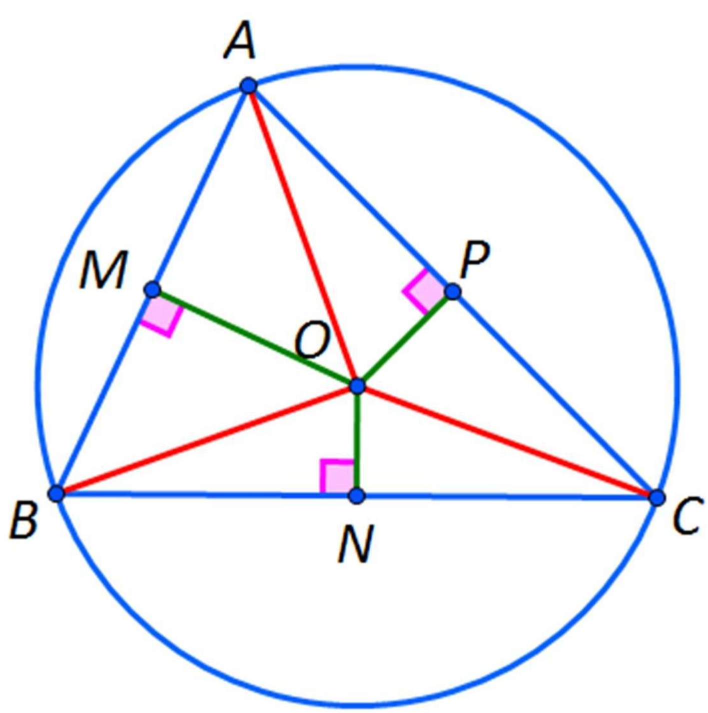


Mediatoarea unui segment

Concurența mediatoarelor laturilor unui triunghi

Într-un triunghi putem construi trei mediatoare, pentru că sunt trei laturi. Cele trei mediatoare sunt concurente (se intersectează) într-un punct numit **centrul cercului circumscris triunghiului** și se notează de obicei cu O. Cercul circumscris unui triunghi este cercul care trece prin vârfurile triunghiului. Punctul O este egal depărtat de vârfurile triunghiului, prin urmare raza cercului este R=OA=OB=OC.

OM, ON și OP sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC



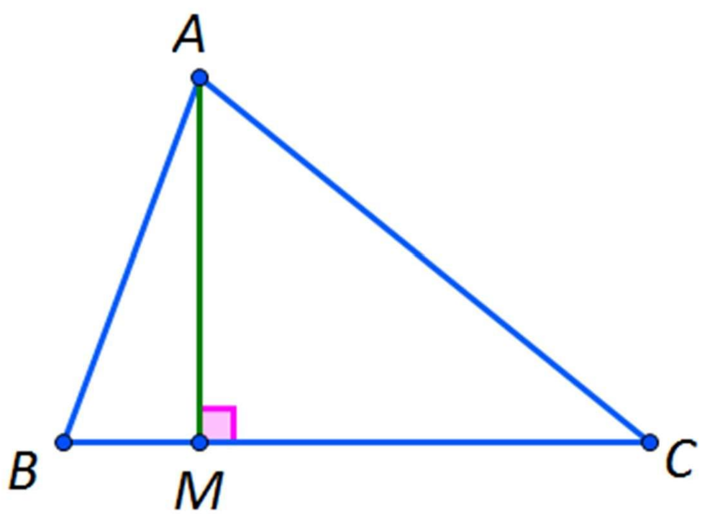
Concurenta mediatoarelor unui triunghi. Centrul cercului circumscris

Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, atunci centrul cercului circumscris coincide cu mijlocul ipotenuzei, iar dacă triunghiul este obtuzunghic, centrul cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului.

3. Înălțimile unui triunghi

Înălțimea unui triunghi este perpendiculara dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă.

$AM \perp BC \Longrightarrow AM$ înălțime

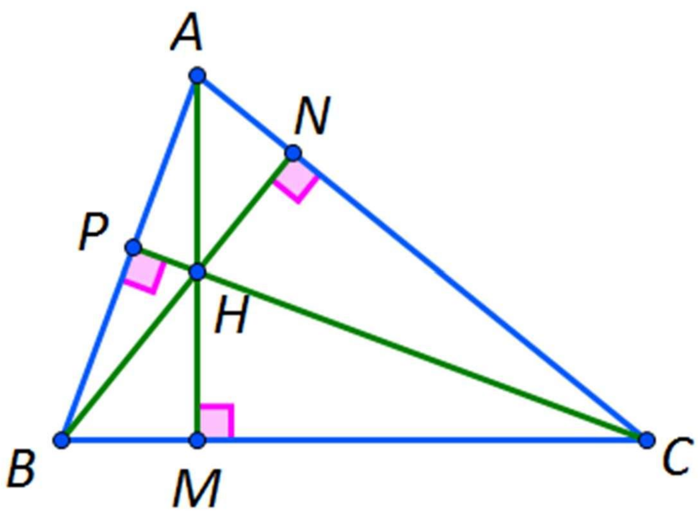


Mai putem spune că AM este *înălțimea corespunzătoare laturii* BC, iar latura BC se numește *bază*. Noțiunea de înălțime a unui triunghi este foarte importantă în geometria plană, deoarece cu ajutorul ei vom defini aria triunghiului.

Concurența înălțimilor unui triunghi

Într-un triunghi putem construi trei înălțimi. Acestea sunt concurente (se intersectează) într-un punct numit **ortocentrul triunghiului** și se notează de obicei cu H.

AM, BN și CP sunt înălțimi în triunghiul ABC



Concurenta inaltimilor unui triunghi. Ortocentrul triunghiului

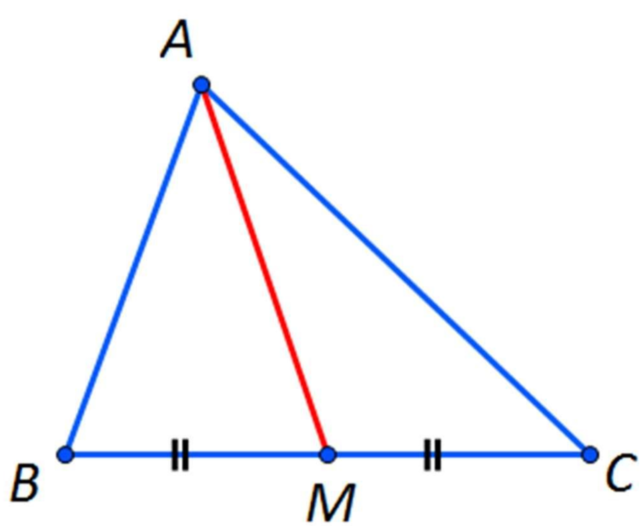
În cazul în care triunghiul este dreptunghic, atunci două dintre înălțimi vor coincide cu catetele, iar în cazul acesta, ortocentrul va fi vârful drept al triunghiului.

Dacă triunghiul este obtuzunghic, atunci ortocentrul va fi situat în exteriorul triunghiului.

4. Medianele unui triunghi

Mediana este segmentul care unește un vârf al unui triunghi cu mijlocul laturii opuse.

M- mijlocul segmentului BC $\Longrightarrow$ AM- mediană în triunghiul ABC



Mediana în triunghi

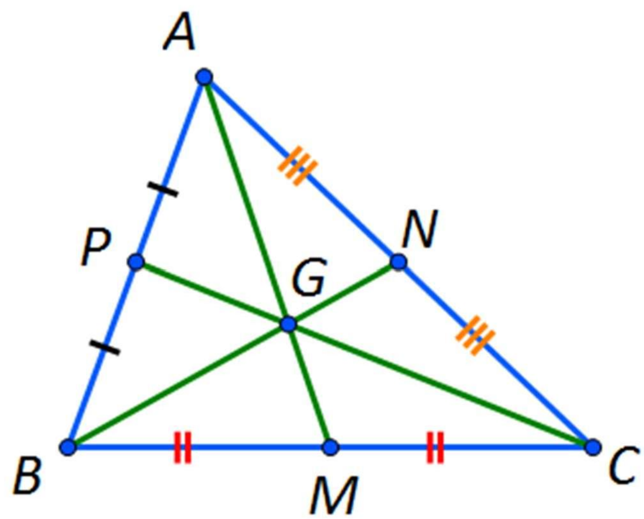
Mediana unui triunghi are o proprietate importantă:

Orice mediană împarte triunghiul în două triunghiuri cu ariile egale: $A_{ABM}=A_{AMC}$. Aceste triunghiuri se numesc *triunghiuri echivalente*.

Concurența medianelor unui triunghi

Într-un triunghi putem construi trei mediane. Acestea sunt concurente într-un punct numit **centrul de greutate al triunghiului** și care se notează cu G. Acest punct este situat pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de bază.

AM, BN și CP sunt mediane în triunghiul ABC



Concurenta medianelor unui triunghi. Centrul de greutate

$$AG = \frac{2}{3}AM \text{ și } GM = \frac{1}{3}AM.$$

Probleme rezolvate cu linii importante in triunghi

Problema 1

Doi frați vor să împartă o felie de pizza triunghiulară. Cum trebuie tăiată pizza pentru a fi împărțită în mod egal?

Rezolvare:

Fixăm mijlocul unei “laturi” a triunghiului și apoi tăiem pizza pe linia mediană, pentru că mediana împarte triunghiul în două triunghiuri cu ariile egale.

Problema 2

Fie triunghiul ABC și AM mediană (M aparţine laturii BC). Ştiind că aria triunghiului ABM este egală cu 24 cm^2 , aflaţi aria triunghiului ABC.

Rezolvare:

Urmărim figura de mai sus. Dacă AM este mediană, aceasta împarte triunghiul ABC în două triunghiuri cu ariile egale.

$A_{ABM} = A_{AMC}$

$A_{ABC} = A_{ABM} + A_{AMC} = 2 \times A_{ABM}$

$A_{ABC} = 2 \times 24 = 48 cm^2$.

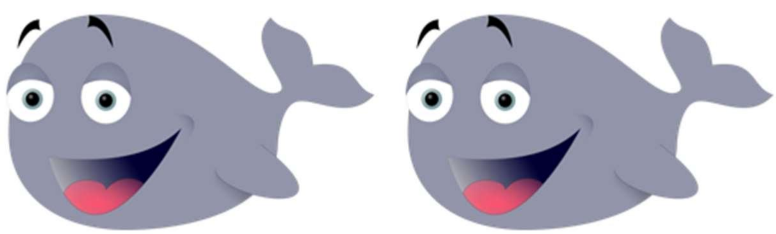
- Criteriile de congruenta a triunghiurilor

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Congruenta triunghiurilor

Două segmente sunt congruente dacă au aceeași lungime. Două unghiuri sunt congruente dacă au aceeași măsură. Dar când sunt congruente două triunghiuri?

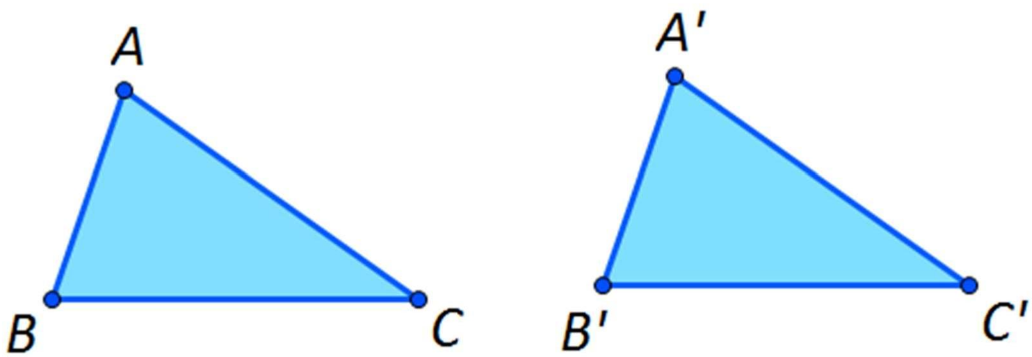
În general, dacă două figuri coincid prin suprapunere, spunem că ele sunt *congruente*.



Figuri congruente

Foto credit: Pixabay

Să ne gândim că avem o bucată de carton pe care desenăm două triunghiuri și apoi le decupăm. Dacă putem așeza cele două triunghiuri unul peste celălalt și ele coincid perfect, atunci cele două triunghiuri sunt congruente.



Triunghiuri congruente

Triunghiurile congruente au elementele corespunzătoare congruente două câte două. Așadar, dacă ΔABC ≡ ΔA'B'C', atunci au loc următoarele șase congruențe:

AB ≡ A'B', BC ≡ B'C', AC ≡ A'C', ∡A ≡ ∡A', ∡B ≡ ∡B', ∡C ≡ ∡C'.

Pentru a demonstra că două triunghiuri sunt congruente, nu este nevoie să demonstrăm toate cele șase congruențe, ci este suficient să demonstrăm doar trei dintre acestea. Dacă trei elemente coincid, atunci coincidența celorlalte este o consecință.

Avem următoarele cazuri (criterii) de congruență:

Congruenta triunghiurilor- Cazuri de congruență

1. Cazul L.U.L. (latură-unghi-latură):

Două triunghiuri sunt congruente dacă au două laturi și unghiul dintre acestea respectiv congruente.

2. Cazul U.L.U. (unghi-latură-unghi):

Două triunghiuri sunt congruente dacă au o latură și două unghiuri alăturate respectiv congruente.

3. Cazul L.L.L. (latură-latură-latură):

Două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile respectiv congruente.

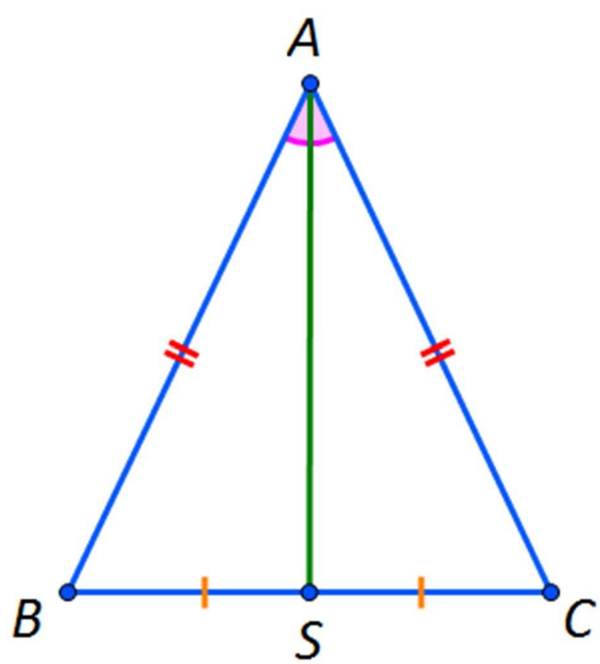
Congruenta triunghiurilor: Metoda triunghiurilor congruente – probleme rezolvate

Metoda triunghiurilor congruente este o metodă prin care putem demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. Dacă într-o problemă se cere să arătăm că două segmente sau două unghiuri sunt congruente, le vom încadra în două triunghiuri a căror congruență o putem demonstra. Din congruența celor două triunghiuri va rezulta congruența segmentelor / unghiurilor cerute.

Problema 1

Fie ABC un triunghi isoscel cu AB≡AC și notăm cu S mijlocul laturii BC. Arătați că ∡BAS ≡ ∡CAS.

Rezolvare:

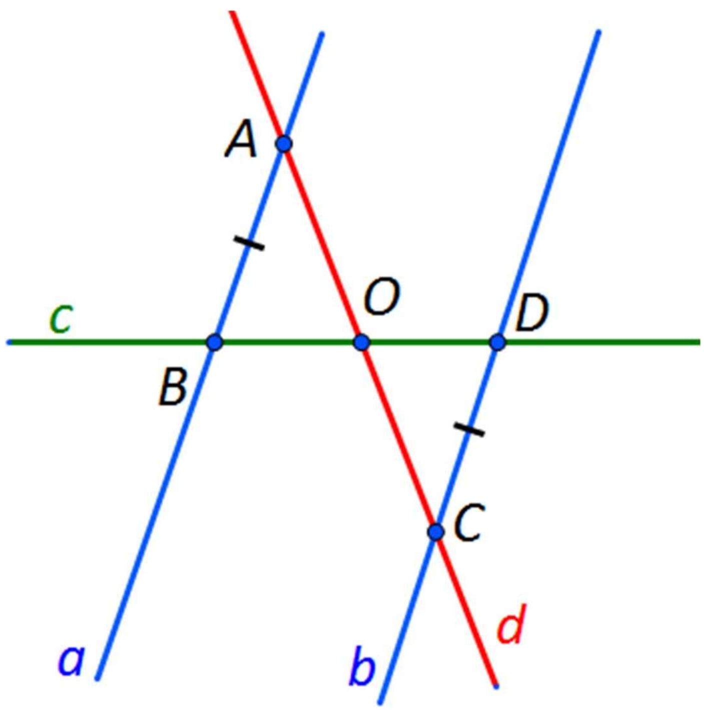


Încercăm să găsim două triunghiuri care conțin cele două unghiuri. ∡BAS face parte din triunghiul ABS și ∡CAS face parte din triunghiul ACS. Prin urmare, vom demonstra că aceste două triunghiuri sunt congruente, iar din congruența lor va rezulta și congruența celor două unghiuri. Pentru a demonstra că triunghiurile ABS și ACS sunt congruente, trebuie să găsim trei elemente respectiv congruente, gândindu-ne la cazurile de congruență menționate mai sus. Știm din datele problemei că AB ≡ AC, iar dacă S este mijlocul lui BC, atunci BS ≡ CS. Iar latura AS este latură comună celor două triunghiuri. Așadar suntem în cazul de congruență L.L.L. (pentru că am găsit trei laturi respectiv congruente). Redactăm astfel:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABS\\ \Delta ACS\end{array}\right| \left.\begin{array}{c} AB \equiv AC\ (ip.)\\ BS \equiv CS\ (ip.)\\ AS \equiv AS\ (lat.com.)\end{array}\right| \overset{(L.L.L)}{\Longrightarrow} \Delta ABS \equiv \Delta ACS \Longrightarrow \measuredangle BAS \equiv \measuredangle CAS.$$

Problema 2

În figura de mai jos, dreptele *a* și *b* sunt paralele, iar *c* și *d* sunt secante. Dacă AB ≡ CD, arătați că OB ≡ OD.



Rezolvare:

Vom arăta că triunghiurile OAB și OCD sunt congruente.

Vom ține cont de faptul că dreptele *a* și *b* sunt paralele și se formează perechi de unghiuri alterne interne congruente.

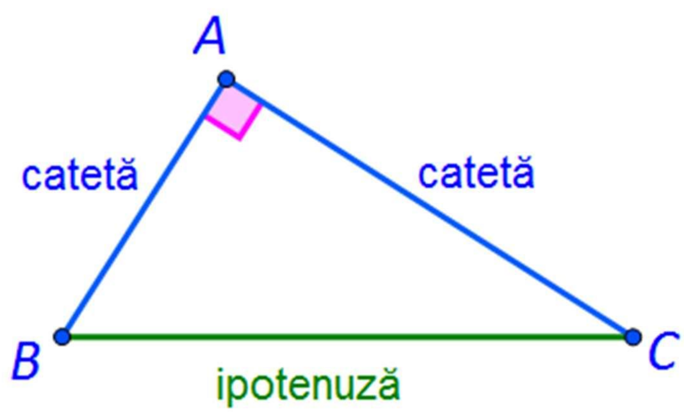
$$\left.\begin{array}{l} \Delta OAB \\ \Delta OCD \end{array}\right| \begin{array}{c} \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC\ (alt.int) \\ AB \equiv CD\ (ip.) \\ \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD\ (alt.int.) \end{array} \left| \begin{array}{l} (U.L.U) \\ \Longrightarrow \Delta OAB \equiv \Delta OCD \Longrightarrow OB \equiv OD. \end{array}\right.$$

Congruenta triunghiurilor dreptunghice

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Despre cazurile de congruență ale triunghiurilor oarecare am discutat într-o altă lecție (vezi lecția ___) și am văzut că pentru a demonstra congruența a două triunghiuri, trebuie să demonstrăm congruența a trei elemente. În cazul triunghiurilor dreptunghice, este suficient să identificăm doar două perechi de elemente congruente (altele în afară de unghiul drept).

Să ne reamintim! Un triunghi este dreptunghic dacă are un unghi drept (cu măsura de 90 de grade). Laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză*.



Triunghiul dreptunghic ABC

Cazurile (criteriile) de congruență ale triunghiurilor dreptunghice

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

1. Cazul C.C. (catetă-catetă):

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au catetele respectiv congruente.

2. Cazul C.U. (catetă-unghi):

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente.

3. Cazul I.U. (ipotenuză-unghi):

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit respectiv congruente.

4. Cazul I.C. (ipotenuză-catetă):

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente.

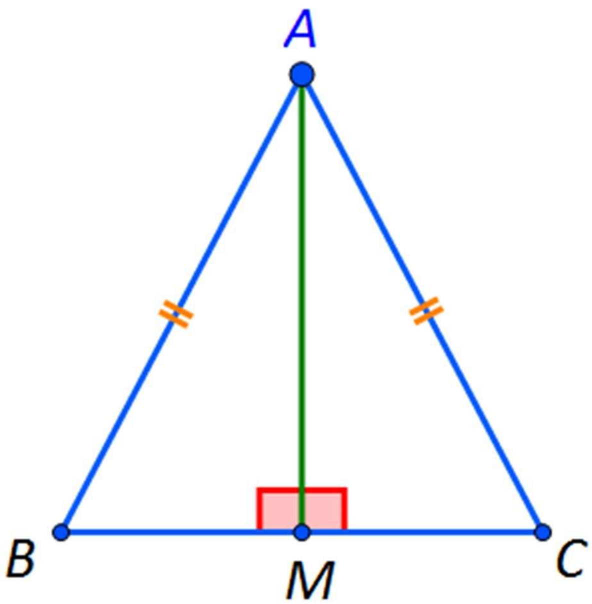
Probleme rezolvate. Metoda triunghiurilor congruente

Metoda triunghiurilor congruente este o metodă prin care putem demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente. Dacă într-o problemă se cere să arătăm că două segmente sau două unghiuri sunt congruente, le vom încadra în două triunghiuri a căror congruență o putem demonstra. Din congruența celor două triunghiuri va rezulta congruența segmentelor / unghiurilor cerute.

Problema 1

Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB \equiv AC$ și fie $AM \perp BC$. Arătați că $\measuredangle ABM \equiv \measuredangle ACM$.

Rezolvare:



Dacă AM⊥BC, atunci triunghiurile ABM și ACM sunt dreptunghice și vom arăta că acestea sunt congruente.

$$\left.\begin{array}{c} \Delta ABM \\ \Delta ACM \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} AB \equiv AC \text{ (ipoteză)} \\ AM \equiv AM \text{ (latură comună)} \end{array}\right| \begin{array}{l} (I.C.) \\ \Longrightarrow \Delta ABM \equiv \Delta ACM \Longrightarrow \measuredangle ABM \equiv \measuredangle ACM \end{array}$$

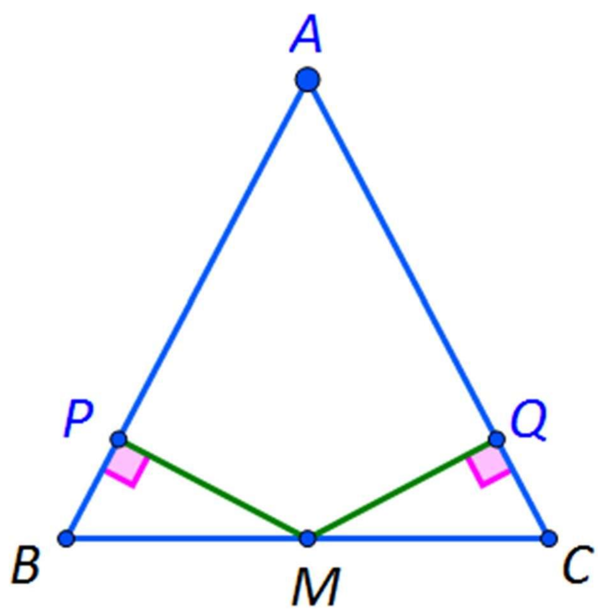
Acesta este un rezultat important și ar fi bine să-l reținem:

Într-un triunghi isoscel, unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

Problema 2

Fie ABC un triunghi isoscel cu AB≡AC și fie M mijlocul laturii BC. Ducem MP⊥AB și MQ⊥AC. Arătați că PB ≡ QC.

Rezolvare:



Triunghiurile MPB și MQC sunt dreptunghice și vom arăta că acestea sunt congruente. În rezolvarea acestei probleme vom folosi rezultatul demonstrat anterior: triunghiul isoscel ABC are unghiurile de la bază congruente: ∡B≡∡C.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta MPB\\ \Delta MQC\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}MB \equiv MC \text{ (ipoteză)}\\ \measuredangle B \equiv \measuredangle C \text{ (vezi pb. 1)}\end{array}\right| \begin{array}{l}(I.U.)\\ \Longrightarrow \Delta MPB \equiv \Delta MQC \Longrightarrow PB \equiv QC.\end{array}$$

- Proprietati ale triunghiului isoscel; proprietati ale triunghiului echilateral

Triunghiul isoscel

ianuarie 1, 2020 / Niciun comentariu

Triunghiul isoscel este triunghiul cu două laturi congruente (egale).

În figura de mai jos, triunghiul ABC este isoscel, AB ≡ AC, iar BC se numește *bază.*

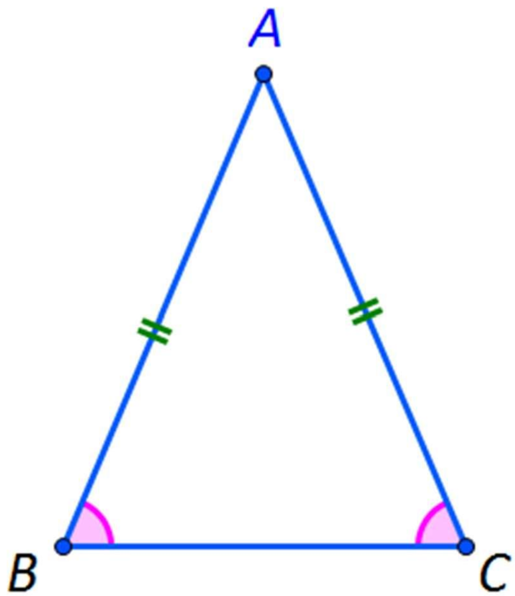


Figura 1- Triunghiul isoscel

În continuare o să vedem care sunt proprietățile triunghiului isoscel.

Proprietățile triunghiului isoscel

Proprietatea 1. Într-un triunghi isoscel, unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

În figura de mai sus, triunghiul ABC isoscel $\Longrightarrow \measuredangle B \equiv \measuredangle C$.

Următoarea proprietate se referă la liniile importante în triunghi. Pentru a înțelege mai bine această proprietate, am desenat mai întâi un triunghi oarecare MNP în care am construit cele patru linii importante (vezi figura 2):

- MO- bisectoarea unghiului M
- ME -înălțime
- MF- mediană (F- mijloc)
- LF- mediatoare

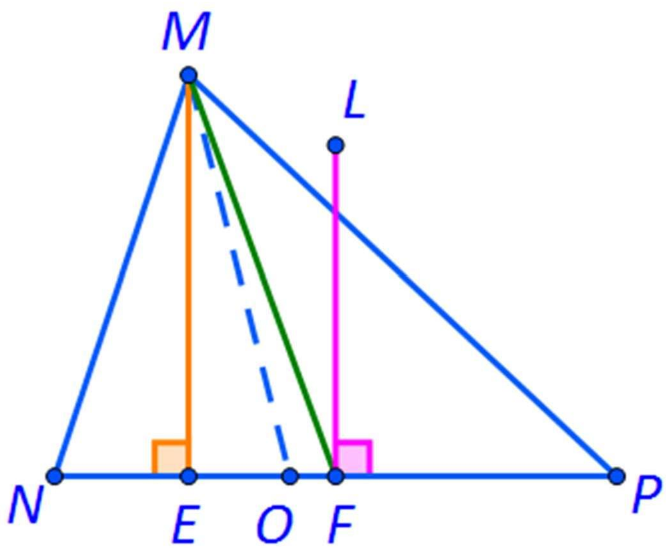


Figura 2- Triunghi oarecare-linii importante

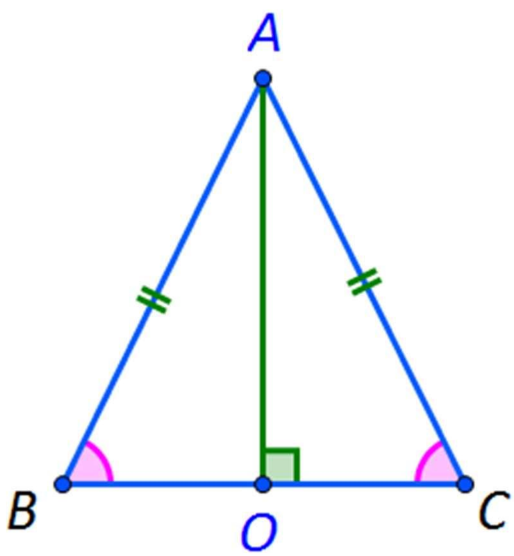


Figura 3- Triunghi isoscel-linii importante

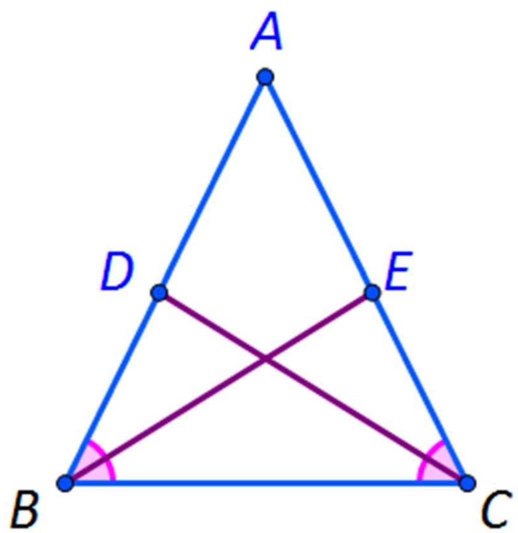
În figura 3, avem triunghiul isoscel ABC, în care am construit de-asemenea, cele patru linii importante: bisectoarea unghiului A, înălțimea din A, mediana și mediatoarea corespunzătoare bazei. Cu toate acestea, se vede doar o singură linie: AO. De ce? Pentru că ele coincid (se suprapun). Așadar, putem formula următoarea proprietate a triunghiului isoscel:

Proprietatea 2. Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului opus bazei este și înălțime, mediană și mediatoare.

Conform acestei proprietăți, *putem demonstra că un triunghi este isoscel dacă două linii importante coincid* (mediana este și înălțime, sau bisectoarea este și mediană, etc.).

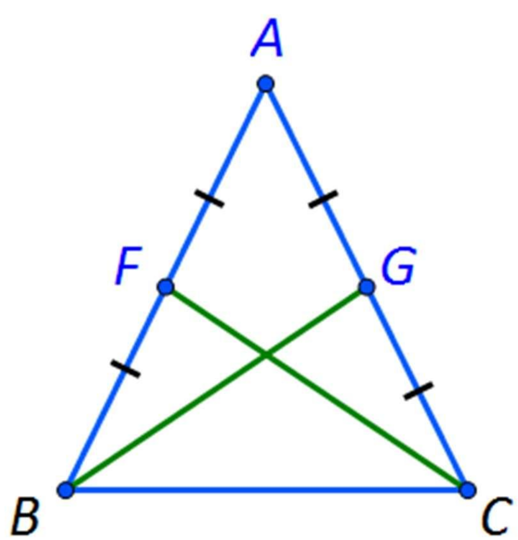
Să vedem în continuare și alte proprietăți ale triunghiului isoscel. Acestea se pot demonstra folosind metoda triunghiurilor congruente.

Proprietatea 3. Într-un triunghi isoscel, bisectoarele unghiurilor congruente sunt congruente.



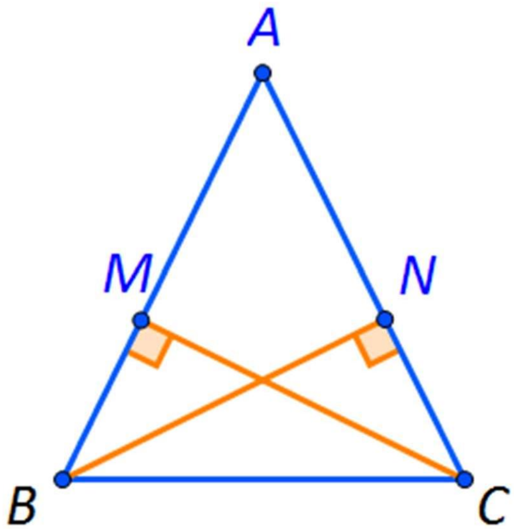
BE şi CD sunt bisectoare, BE ≡ CD

Proprietatea 4. Într-un triunghi isoscel, medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.



BG şi CF sunt mediane, $BG \equiv CF$

Proprietatea 5. Într-un triunghi isoscel, înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.



BN şi CM sunt înălţimi, $BN \equiv CM$

Probleme rezolvate cu triunghiul isoscel

Problema 1

Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC. Dacă unghiul B are măsura de 50°, aflați celelalte unghiuri.

Rezolvare:

Unghiurile de la bază sunt congruente, prin urmare ∡C=∡B=50°.

∡A=180°-(50°+50°)=80°.

Problema 2

Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC=6 cm. Știind că perimetrul triunghiului este de 20 cm, aflați lungimile laturilor AB și AC.

Rezolvare:

Dacă baza este BC, atunci AB=AC.

P=AB+AC+BC=2AB+BC=20 cm

2AB+BC=20

2AB+6=20

2AB=20-6=14

AB=14:2=7 cm

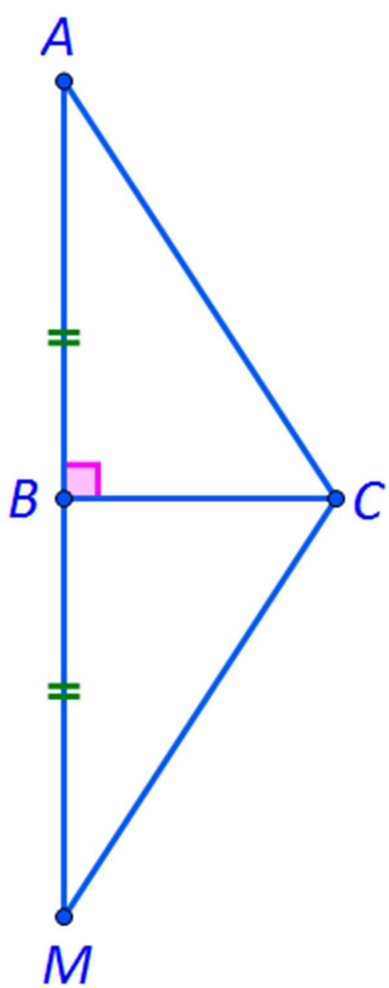
AC=AB=7 cm.

Problema 3

Fie ABC un triunghi dreptunghic în B și fie M simetricul punctului A față de B. Arătați că triunghiul ACM este isoscel.

Rezolvare:

Haideți să vedem mai întâi ce este simetricul unui punct față de un punct. Punctul M este simetricul punctului A față de B, dacă B este mijlocul segmentului AM. Așadar, pentru a construi simetricul lui A față de B, vom prelungi segmentul AB cu un alt segment MB congruent cu AB.



Metoda 1

Putem arăta că un triunghi este isoscel dacă două linii importante coincid. În cazul de față, observăm că *CB este înălțime*, pentru că CB⊥AM și *CB este și mediană*, deoarece punctul B este mijlocul segmentului AM, conform construcției făcute. Prin urmare, triunghiul CAM este isoscel.

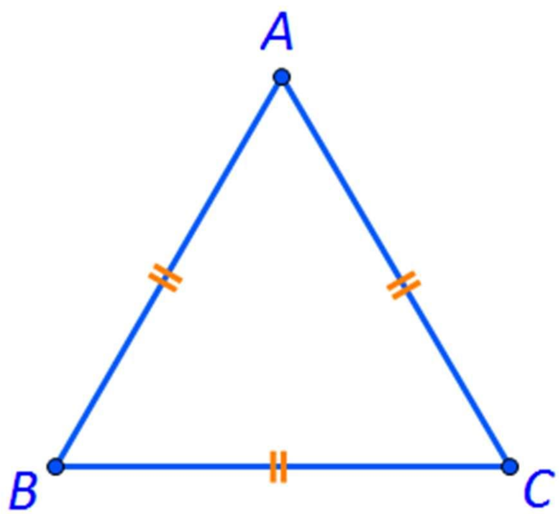
Metoda 2

Am fi putut rezolva problema și prin metoda triunghiurilor congruente: se arată că triunghiurile dreptunghice CAB și CMB sunt congruente (caz C.C.), de unde rezultă că CA ≡ CM, așadar triunghiul CAM este isoscel (pentru că are două laturi egale).

Triunghiul echilateral

Triunghiul echilateral este triunghiul cu toate laturile congruente (egale).

ΔABC echilateral $\Longrightarrow AB \equiv AC \equiv BC$.



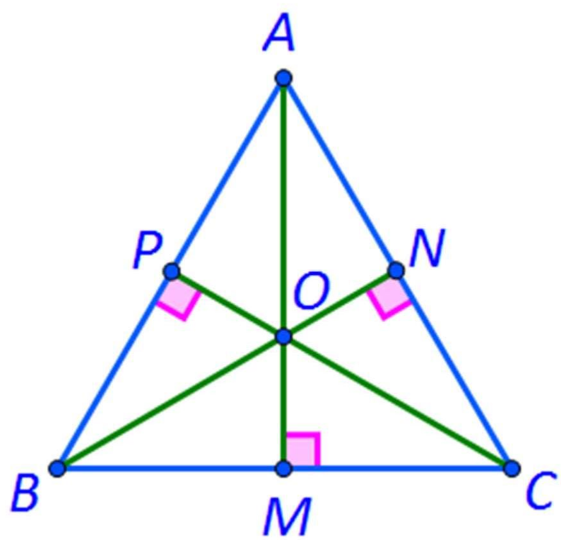
Triunghiul echilateral

Proprietățile triunghiului echilateral

Proprietatea 1. Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente, având fiecare măsura egală cu 60° (180°:3=60°).

$$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = 60^\circ.$$

Proprietatea 2. Într-un triunghi echilateral, toate liniile importante care pornesc din același vârf coincid (bisectoarele unghiurilor coincid cu înălțimile, medianele și mediatoarele). Acestea sunt și axe de simetrie.



Liniile importante în triunghiul echilateral

Proprietatea 3. Într-un triunghi echilateral, centrul cercului circumscris coincide cu centrul cercului înscris, cu ortocentrul și cu centrul de greutate (notat pe figură cu O).

Trebuie amintit faptul că triunghiul echilateral moștenește toate proprietățile triunghiului isoscel.

Important! Un triunghi isoscel care are un unghi de 60° este triunghi echilateral.

Perimetrul triunghiului echilateral

Dacă notăm laturile triunghiului cu *l*: AB=AC=BC=*l*, atunci perimetrul triunghiului ABC va fi:

$$P = 3l.$$

Pentru elevii de clasa a VII-a, menționăm și formula de calcul pentru aria triunghiului echilateral:

Aria triunghiului echilateral

$$\mathcal{A} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Probleme rezolvate cu triunghiul echilateral

Problema 1

Aflați perimetrul unui triunghi echilateral cu latura de 7 cm.

Rezolvare:

P=3·7=21 cm.

Problema 2

Aflați latura unui triunghi echilateral având perimetrul de 13,5 cm.

Rezolvare:

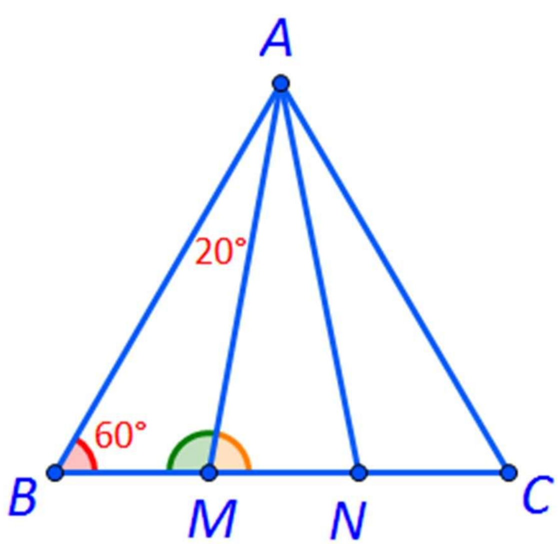
P=3*l*

l=P:3=13,5:3=4,5 cm.

Problema 3

Fie triunghiul echilateral ABC și punctele M și N pe latura BC astfel încât ∡BAM≡∡MAN≡∡NAC. Aflați măsura unghiului AMN.

Rezolvare:



∡A= ∡B= ∡C=60 °

∡BAM=∡MAN=∡NAC=60°:3=20°

În triunghiul ABM, ∡AMB=180° -(60° +20°)=100°.

Unghiurile AMB și AMN sunt suplementare, prin urmare ∡AMN=180° – ∡AMB =180° -100° =80°.

- Triunghiul dreptunghic: proiectii ortogonale pe o dreapta; teorema inaltimii; teorema catetei,

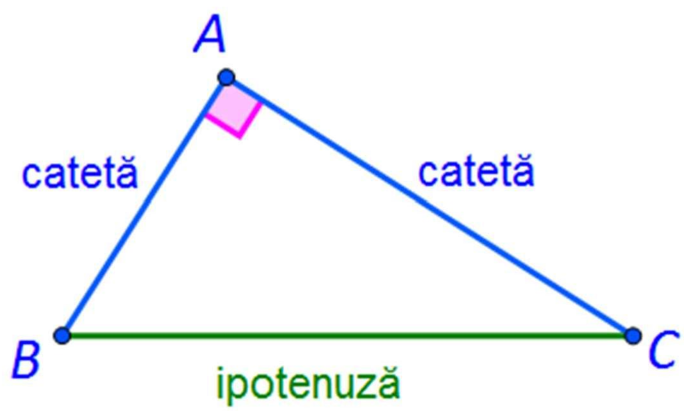
teorema lui Pitagora; reciproca teoremei lui Pitagora
- Perimetrul si aria (formule de calcul)

Triunghiul dreptunghic

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

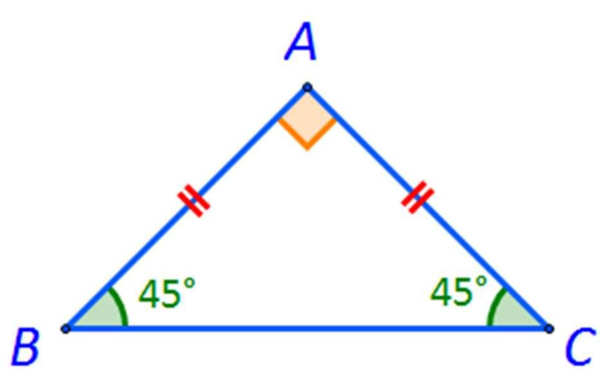
Triunghiul dreptunghic este triunghiul care are un unghi drept (cu măsura de 90°).

Laturile care formează unghiul drept se numesc *catete*, iar latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză.*



Triunghiul ABC dreptunghic în A

Un triunghi dreptunghic care are catetele congruente se numește *triunghi dreptunghic isoscel*. În acest caz, unghiurile ascuțite sunt congruente și au măsura egală cu 45° (pentru că (180°-90°):2=45°).

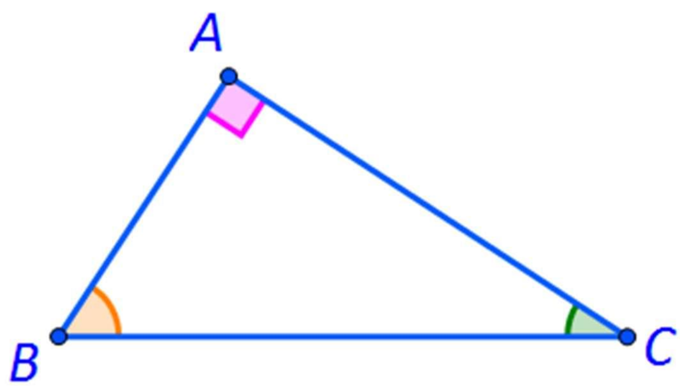


Triunghi dreptunghic isoscel

Proprietățile triunghiului dreptunghic

Proprietatea 1. Într-un triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt complementare.

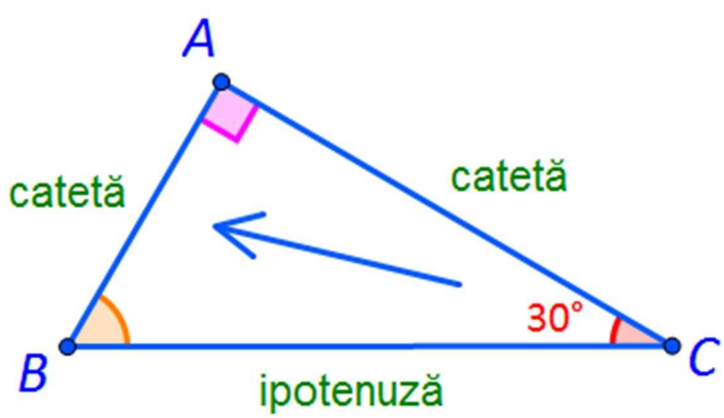
$$\measuredangle B + \measuredangle C = 90°.$$



Triunghiul dreptunghic

Proprietatea 2. Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi cu măsura de 30 de grade, atunci cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză.

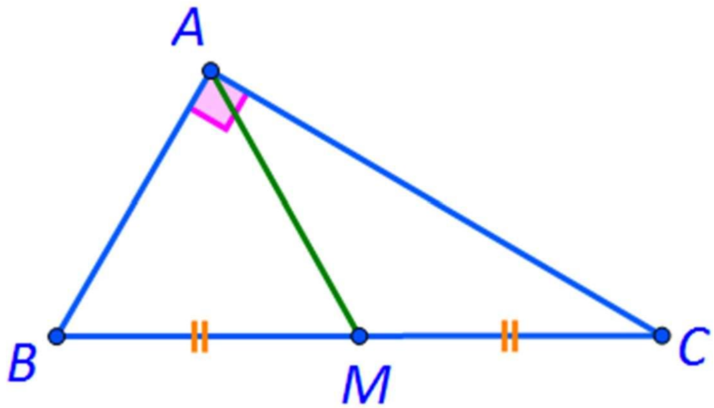
$$AB = BC/2.$$



Triunghi dreptunghic cu un unghi de 30 de grade

Proprietatea 3. Într-un triunghi dreptunghic, mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză.

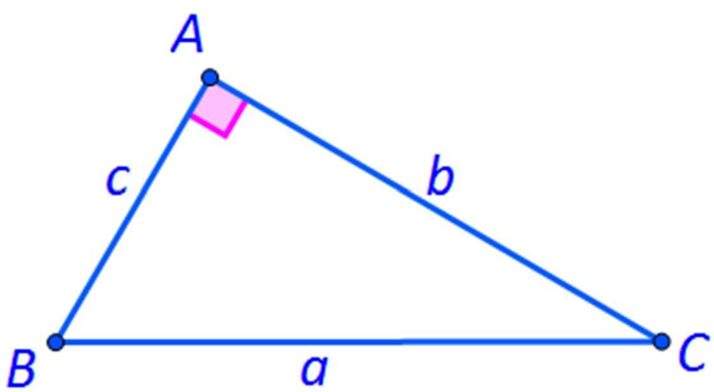
$$AM\text{- mediană (M mijlocul lui BC)} \Longrightarrow AM = BC/2.$$



Mediana în triunghiul dreptunghic

Teorema lui Pitagora. În orice triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

$$AB^2+AC^2 = BC^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Triunghi dreptunghic- Teorema lui Pitagora

Pentru elevii din clasa a VII-a, menționăm și formulele de calcul pentru aria unui triunghi dreptunghic:

Aria triunghiului dreptunghic

Aria unui triunghi dreptunghic se poate scrie în două moduri:

- Dacă notăm cele două catete cu c_1 și c_2, atunci formula pentru arie este semiprodusul catetelor:

$$\mathcal{A} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}.$$

Aria triunghiului dreptunghic

- Dacă notăm cu *i*– ipotenuza triunghiului și cu *h*– înălțimea corespunzătoare ei, atunci aria triunghiului se calculează folosind formula:

$$\mathcal{A} = \frac{i \cdot h}{2}.$$

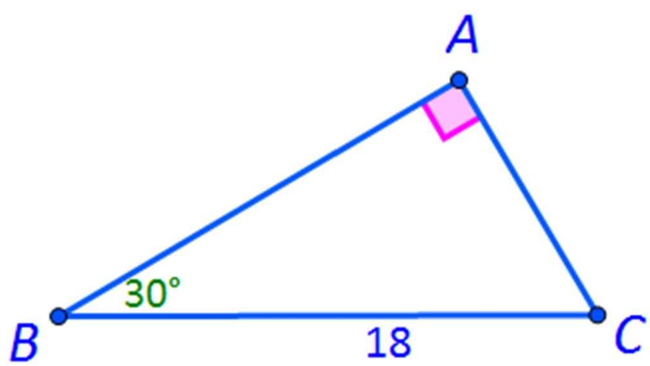
Aria triunghiului dreptunghic

Probleme rezolvate cu triunghiul dreptunghic

Problema 1

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu ∡B=30°. Dacă BC=18 cm, aflați lungimea laturii AC.

Rezolvare:

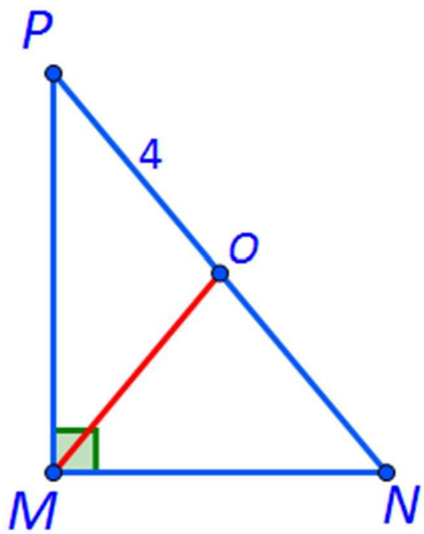


Latura AC este catetă opusă unghiului de 30°, prin urmare ea va fi jumătate din ipotenuză.

AC = BC/2 = 18:2 =9 cm.

Problema 2

În figura de mai jos, triunghiul MNP este dreptunghic în M, iar O este mijlocul lui NP. Știind că PO=4 cm, aflați lungimea segmentului MO.



Rezolvare:

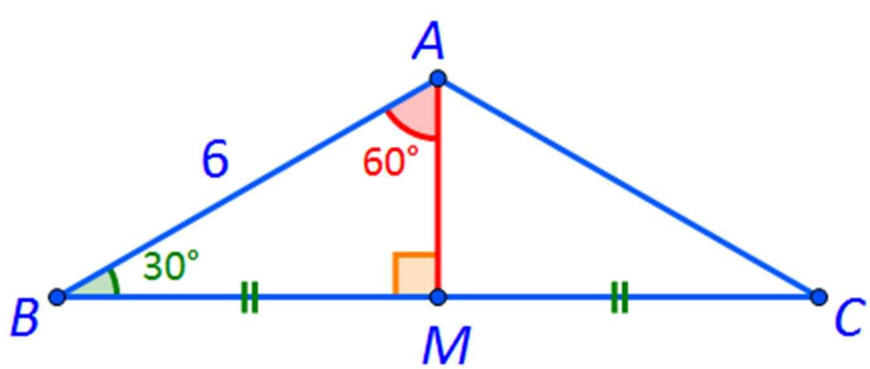
Dacă O este mijlocul lui NP, atunci PO = ON = 4 cm. Prin urmare, PN = 4+4 = 8 cm.

MO este mediană și ea va fi jumătate din ipotenuză: MO = PN/2 = 8:2 = 4 cm.

Problema 3

Fie ABC un triunghi isoscel cu ∡A=120° și fie M mijlocul laturii BC. Dacă AB=6 cm, aflați lungimea segmentului AM.

Rezolvare:



Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci ∡B=∡C=(180° -120°):2=30°.

AM este mediană în triunghiul isoscel ABC, prin urmare ea va fi și bisectoare și înălțime.

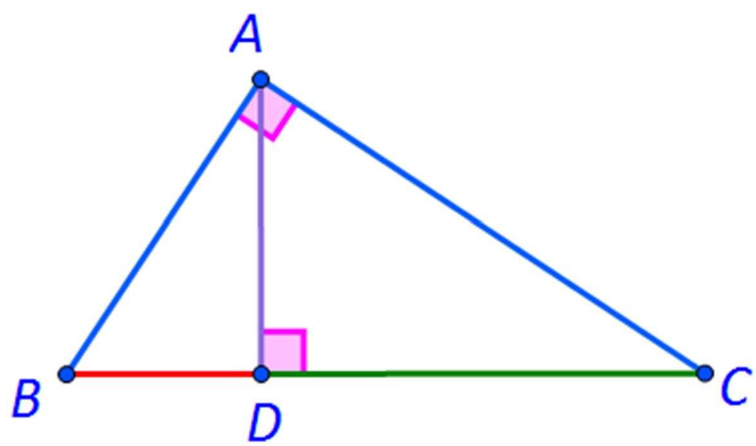
∡BAM = ∡CAM = ∡BAC:2 = 120°:2 = 60°.

Triunghiul AMB este dreptunghic în M, iar AM este cateta opusă unghiului de 30 de grade, așadar AM = AB/2 = 6/2 = 3 cm.

Teorema inaltimii

Teorema înălțimii. Într-un triunghi dreptunghic, pătratul înălțimii este egal cu produsul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Sună complicat, dar nu e   Să privim desenul următor:



Teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Catetele sunt AB și AC, iar ipotenuza este BC. Notăm cu AD înălțimea triunghiului, $AD \perp BC$. Proiecția catetei AB pe ipotenuză este BD, iar proiecția catetei AC pe ipotenuză este CD. Atunci, conform teoremei înălțimii, are loc relația:

$$AD^2 = BD \cdot CD.$$

Această relație se deduce din asemănarea triunghiurilor ADC și BDA (caz de asemănare U.U.).

În continuare vom deduce o altă formulă importantă pentru calculul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

Înălțimea într-un triunghi dreptunghic se poate exprima și în funcție de laturile triunghiului ABC. Astfel, dacă scriem aria triunghiului ABC în două moduri și egalăm cele două relații, vom avea:

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} \text{ sau } \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

$$BC \cdot AD = AB \cdot AC$$

$$\boxed{AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.}$$

Formula înălțimii în triunghiul dreptunghic în funcție de laturi

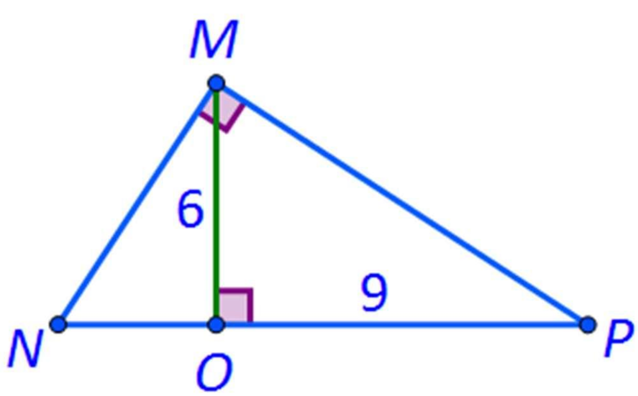
Am obținut astfel că înălțimea unui triunghi dreptunghic este produsul catetelor supra ipotenuză.

Probleme rezolvate cu teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic

Problema 1

Fie MNP un triunghi dreptunghic în M și fie MO⊥NP. Dacă MO=6 cm și OP=9 cm, aflați lungimea ipotenuzei NP.

Rezolvare:



Aplicăm teorema înălțimii $MO^2 = NO \cdot OP$ și vom înlocui lungimile cunoscute MO = 6 și OP = 9:

$36 = NO \cdot 9 \Longrightarrow NO = 36:9 = 4$ cm.

NP = NO+OP = 4+9 = 13 cm.

Problema 2

Aflați înălțimea unui triunghi dreptunghic având catetele de 9 cm, 12 cm și ipotenuza de 15 cm.

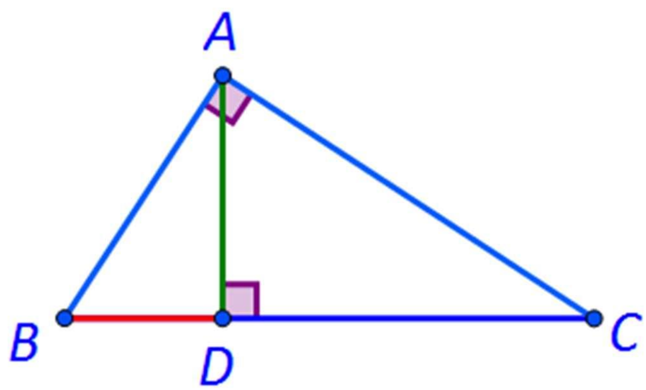
Rezolvare:

Notăm cu *h* înălțimea triunghiului. Atunci *h* va fi produsul catetelor supra ipotenuză:

$$h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{108}{15} = 7{,}2\ cm.$$

Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul unei catete este produsul dintre ipotenuză și proiecția catetei pe ipotenuză.



Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și fie AD⊥BC. Catetele sunt AB și AC, iar ipotenuza este BC. Proiecția catetei AB pe ipotenuză este BD, iar proiecția catetei AC pe ipotenuză este DC. Atunci, conform teoremei catetei, au loc relațiile:

$$AB^2 = BD \cdot BC$$
$$AC^2 = DC \cdot BC.$$

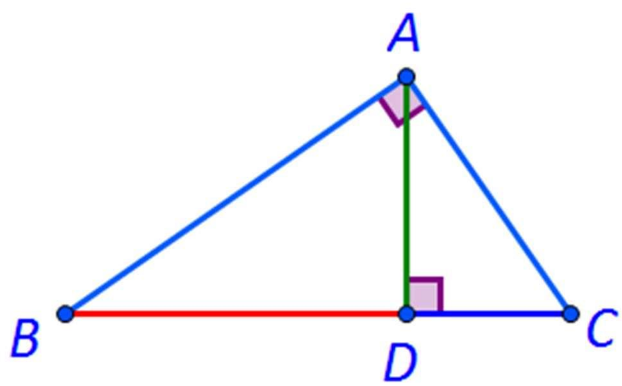
Prima relație se deduce din asemănarea triunghiurilor ABC și DBA (caz de asemănare U.U.), iar a doua relație se deduce din asemănarea triunghiurilor ABC și DAC (caz U.U.).

Probleme rezolvate cu teorema catetei

Problema 1

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu AB=$6\sqrt{3}$ cm și BC=12 cm. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei și perimetrul triunghiului ABC.

Rezolvare:



Pentru a afla înălțimea AD, trebuie mai întâi să aflăm proiecțiile catetelor pe ipotenuză. Pentru a afla lungimea proiecțiilor BD și CD, vom aplica teorema catetei:

$AB^2=BD\cdot BC$
$(6\sqrt{3})^2=BD \cdot 12$
$36 \cdot 3=BD \cdot 12 \quad |:12$
BD=9 cm.

DC=BC-BD=12-9=3 cm.

Acum aplicăm teorema înălțimii pentru a afla AD:

$AD^2=BD \cdot DC$
$AD^2=9 \cdot 3=27$

$$AD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Pentru a afla perimetul triunghiului ABC, trebuie mai întâi să calculăm lungimea catetei AC, folosind teorema catetei:

$AC^2=DC\cdot BC=12\cdot 3=36$
$AC=\sqrt{36}=6$ cm.

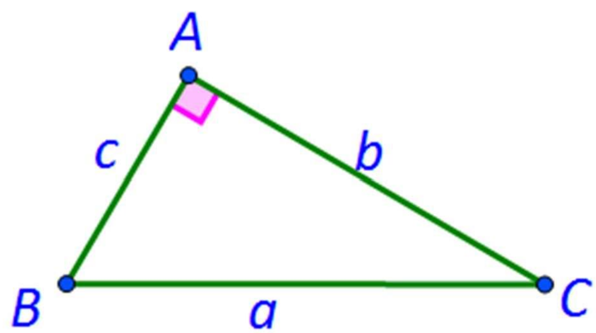
În continuare vom calcula perimetrul triunghiului ABC.

$P = AB+BC+AC = 6\sqrt{3} +12+6 = 18+ 6\sqrt{3}$ cm.

Teorema lui Pitagora

Teorema lui Pitagora exprimă o relație între lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Există unele dovezi că această teoremă a fost cunoscută cu mult timp înaintea lui Pitagora şi nu se ştie sigur dacă a fost demonstrată de Pitagora. Dar, indiferent care îi sunt originile, ea a avut un foarte mare impact asupra omenirii. Teorema lui Pitagora a făcut posibilă dezvoltarea cartografiei, a navigației şi a topografiei. Această teoremă permite calcularea distanțelor cu ajutorul coordonatelor şi a inspirat trigonometria, ştiința care stă la baza cartografierii. Teorema lui Pitagora a deschis direcții noi de explorare a universului, conducând la apariția teoriei generale a relativității.

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.



Triunghiul ABC este dreptunghic în A

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$
$$a^2 = b^2+c^2$$

Are loc şi reciproca teoremei lui Pitagora, care ne permite să demonstrăm că un triunghi este dreptunghic, atunci când se cunosc lungimile laturilor.

Reciproca teoremei lui Pitagora. Dacă într-un triunghi, suma pătratelor a două laturi este egală cu pătratul celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Patrulaterul

- Patrulaterul convex; suma masurilor unghiurilor unui patrulater convex

Patrulaterele convexe reprezintă cele mai cunoscute patrulatere. Prin definiție, un patrulater este convex dacă dreapta-suport a fiecărei laturi are proprietatea că în unul din semiplanele deschise determinate de ea se află două vârfuri ale patrulaterului. O altă definiție, mai puțin riguroasă dar mai intuitivă, este aceea că la patrulaterele convexe prelungirea oricărei laturi nu intersectează nicio altă latură.

Cazuri particulare de patrulatere convexe:

- *trapezul*: două laturi opuse sunt paralele;

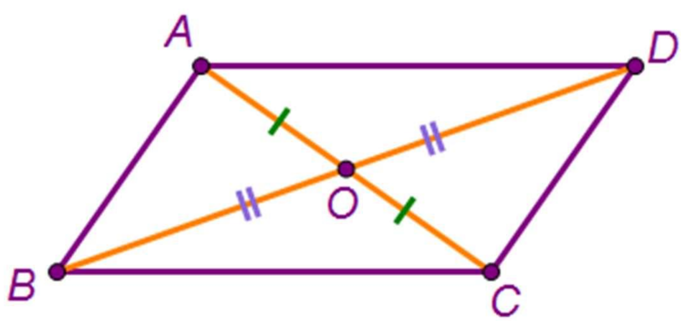
- *trapezul isoscel*: două laturi sunt paralele și celelalte două sunt congruente; prezintă proprietatea că diagonalele sunt congruente;
- *paralelogramul*: laturile opuse sunt paralele și congruente;
- *rombul*: paralelogramul cu toate laturile egale; prezintă proprietatea că diagonalele sunt perpendiculare;
- *dreptunghiul*: paralelogramul cu toate unghiurile drepte; prezintă proprietatea că diagonalele sunt congruente;
- *pătratul*: rombul cu toate unghiurile drepte sau dreptunghiul cu toate laturile egale; prezintă proprietatea că diagonalele sunt congruente și perpendiculare;
- *patrulaterul inscriptibil*: patrulaterul ale cărui vârfuri aparțin unui cerc; pătratul, dreptunghiul și trapezul isoscel sunt patrulatere inscriptibile;
- *patrulaterul circumscriptibil*: patrulaterul în care poate fi înscris un cerc. Teorema lui Pitot se referă la acest tip de patrulatere: „Un patrulater convex este circumscriptibil dacă și numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale".

- Paralelogramul, proprietati; paralelograme particulare: dreptunghi, romb, patrat - proprietati; trapezul - clasificare, proprietati, linia mijlocie in trapez
- Perimetre si arii: dreptunghi, romb, patrat, trapez

Paralelogramul

Paralelogramul este patrulaterul cu laturile opuse paralele.

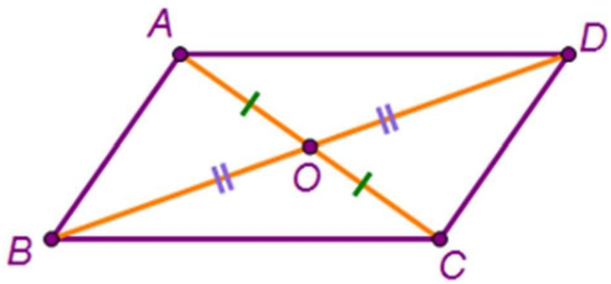
AB \parallel CD, AD \parallel BC.$AB \parallel CD, AD \parallel BC$.



Paralelogramul

Proprietățile paralelogramului:

- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc (au același mijloc).



✓ $AB = CD, AD = BC.$
✓ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle D.$
✓ $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°,\ \sphericalangle B + \sphericalangle C = 18$
✓ $AO = OC, BO = OD.$

Proprietățile paralelogramului

Cum demonstrăm că un patrulater este paralelogram?

Un patrulater este paralelogram dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- are laturile opuse paralele două câte două
- are laturile opuse congruente două câte două;
- are două laturi opuse paralele și congruente;
- are unghiurile opuse congruente;
- oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc.

Perimetrul paralelogramului

Perimetrul paralelogramului este suma lungimilor laturilor. Dacă notăm cu a și b laturile paralelogramului, atunci perimetrul său este:

$$P = 2a + 2b.$$

Aria paralelogramului

Aria paralelogramului se calculează înmulțind o latură (a) cu înălțimea corespunzătoare ei (h). Înălțimea este distanța de la un vârf al paralelogramului la latura opusă.

$$A = a \cdot h.$$

O altă formulă de calcul pentru arie este produsul a două laturi (a și b) și sinusul unghiului ascuțit u dintre ele:

$$A = ab \cdot \sin u.$$

Probleme rezolvate cu paralelogram

Problema 1

Fie ABCD un paralelogram cu măsura unghiului A de 134 de grade. Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

Rezolvare. Urmărim figura de mai sus.

$$\sphericalangle C = \sphericalangle A = 134° \text{ (unghiuri opuse)}$$
$$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° \text{ (unghiuri alăturate)} \Longrightarrow \sphericalangle B = 180° - \sphericalangle A = 180° - 134° = 46°$$
$$\sphericalangle D = \sphericalangle B = 46° \text{ (unghiuri opuse).}$$

Problema 2

Fie ABCD un paralelogram. Dacă AB = 6 cm și perimetrul paralelogramului este 48 cm, aflați lungimea laturii BC.

Rezolvare:

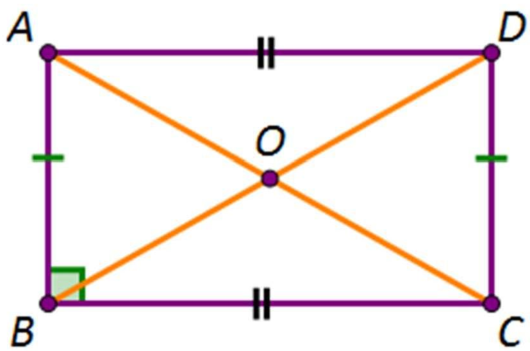
$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= 2 \cdot AB + 2 \cdot BC = 48\ cm \\ 2 \cdot 6 + 2 \cdot BC &= 48 \\ 12 + 2 \cdot BC &= 48 \\ 2 \cdot BC &= 48 - 12 \\ 2 \cdot BC &= 36 \\ BC &= 36 : 2 = 18\ cm. \end{aligned}$$

Acum e rândul tău Încearcă să rezolvi singur următoarea problemă. Dacă ai reușit, scrie-ne răspunsul într-un comentariu.

TEMĂ. Fie MATE un paralelogram. Dacă MA=3 cm și perimetrul paralelogramului este 15 cm, aflați lungimea laturii AT.

Dreptunghiul

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept.



Proprietățile dreptunghiului :

- are laturile opuse paralele două câte două (AB || CD, BC || AD);
- are laturile opuse congruente două câte două (AB ≡ CD, BC ≡ AD);
- are toate unghiurile congruente (cu măsura egală cu 90 de grade);
- diagonalele sunt congruente (AC ≡ BD);
- diagonalele se înjumătățesc (AO ≡ OC, BO ≡ OD).

Cum arătăm că un patrulater este dreptunghi? Un patrulater este dreptunghi dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- este paralelogram și are un unghi drept;
- este paralelogram și are diagonalele congruente.

În concluzie, pentru a demonstra că un patrulater este dreptunghi, arătăm mai întâi că este paralelogram (vezi și lecția “Paralelogramul”) și apoi demonstrăm că are un unghi drept sau diagonalele congruente.

Perimetrul dreptunghiului

Dacă notăm latura AB=l (lățimea) și latura BC=L (lungimea), atunci perimetrul dreptunghiului este:
$P=2l+2L$.

Aria dreptunghiului

Dacă notăm cu l lățimea și cu L lungimea dreptunghiului, atunci formula de calcul pentru aria dreptunghiului este:
$A=l\cdot L$.

Probleme rezolvate

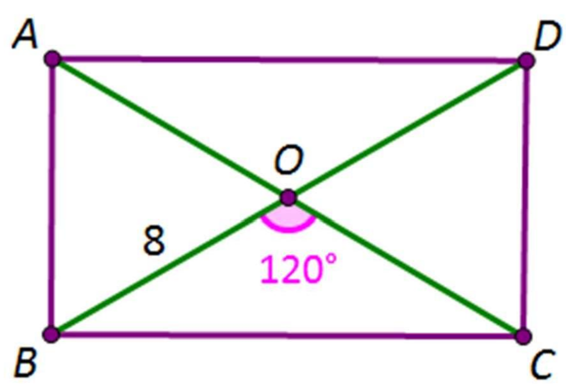
Problema 1. Aflați perimetrul unui dreptunghi cu lungimea egală cu 18 cm și lățimea egală cu două treimi din lungime.
Rezolvare:

$$L = 18\ cm$$

$$l = \frac{2}{3}\cdot L = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot \overset{6}{\cancel{18}} = 2\cdot 6 = 12\ cm$$

$$P = 2l + 2L = 2\cdot 12 + 2\cdot 18 = 24 + 36 = 60\ cm.$$

Problema 2. Fie ABCD un dreptunghi și notăm cu O intersecția diagonalelor. Știind că unghiul BOC are măsura egală cu 120^o și că BO=8 cm, aflați perimetrul triunghiului AOB.
Rezolvare.



$\measuredangle AOB = 180^o - \measuredangle BOC = 180^o - 120^o = 60^o$
AO=AC/2 și BO=BD/2, dar pentru că AC=BD, rezultă că AO=BO, deci triunghiul AOB este isoscel și are un unghi de 60^o. Prin urmare triunghiul AOB este echilateral.
AO=BO=AB=8 cm
P_{AOB}=AO+BO+AB=3·8=24 cm.

Acum e rândul tău Încearcă să rezolvi singur următoarele probleme. Dacă ai reușit, scrie-ne și nouă răspunsul într-un comentariu.

Temă

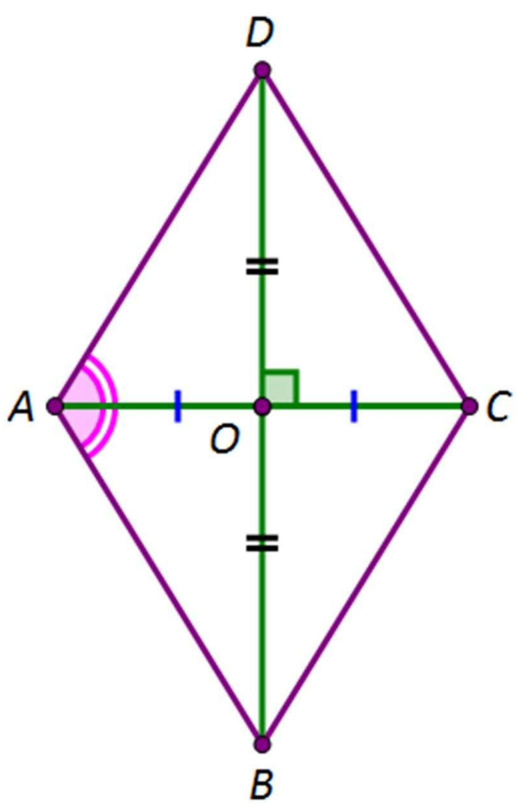
Problema 1. Aflați perimetrul unui dreptunghi cu lungimea de 8 cm și lățimea egală cu 25% din lungime.

Problema 2. Fie ABCD un dreptunghi. Dacă perimetrul triunghiului ABC este de 24 cm, iar diagonala AC=10 cm, aflați perimetrul dreptunghiului ABCD.

Problema 3. Fie ABCD un dreptunghi (AB>BC) și notăm cu O intersecția diagonalelor. Construim dreapta DP perpendiculară pe AC. Dacă măsura unghiului BOC este de 60^o și AP=2 cm, aflați lungimea diagonalei AC.

Rombul

Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente. (În consecință, toate laturile rombului sunt congruente).



Rombul

Proprietățile rombului

- are laturile opuse paralele două câte două AB || CD, AD || BC;
- are toate laturile congruente (egale): AB = BC = CD =DA = *l*.
- unghiurile opuse sunt congruente și oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc: AO ≡ OC, BO ≡ OD;
- diagonalele sunt perpendiculare;

- diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor.

Cum demonstrăm că un patrulater este romb? Un patrulater este romb dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- este paralelogram (vezi și lecția "Paralelogramul") și are două laturi consecutive congruente;
- este paralelogram cu diagonalele perpendiculare;
- este paralelogram în care una din diagonale este și bisectoare.

Perimetrul rombului

Perimetrul unui romb este suma lungimilor laturilor. Dacă notăm laturile cu *l*, atunci AB=BC=CD=DA=*l* (toate laturile sunt egale), iar perimetrul rombului se calculează folosind formula:

$$P = 4l.$$

Aria rombului

Aria rombului este semiprodusul diagonalelor. Dacă notăm cu d1 și d2 diagonalele, atunci aria rombului este:

$$A = (d1 \cdot d2)/2.$$

O altă formulă pentru aria unui romb este produsul dintre pătratul unei laturi și sinusul unghiului ascuțit:

$$A = l^2 \cdot \sin B$$

Se poate folosi și formula de calcul de la aria paralelogramului (rombul fiind un paralelogram) și anume produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei.

$$A = l \cdot h$$

Probleme rezolvate cu rombul

Problema 1

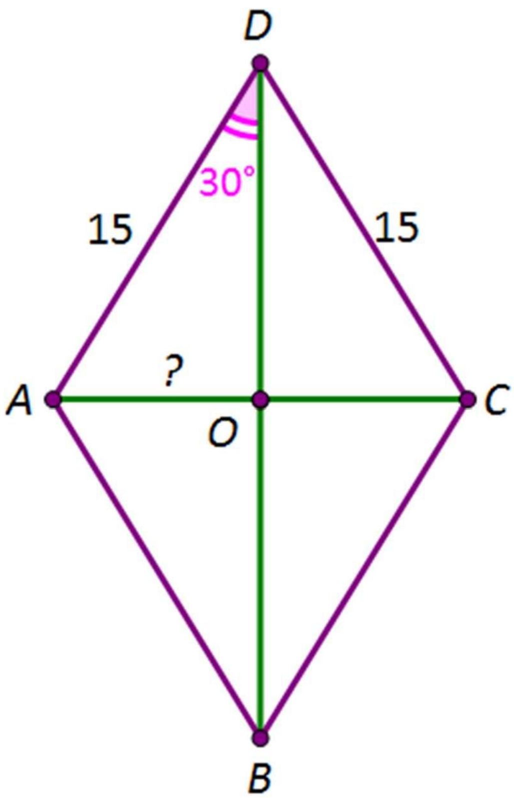
Aflați latura unui romb știind că perimetrul său este 25 cm.

Rezolvare. P=4*l*=25 cm
l=25:4
l=6,25 cm.

Problema 2

Fie ABCD un romb având perimetrul de 60 cm și măsura unghiului ADB egală cu 30^o. Aflați lungimea segmentului AO, unde O este punctul de intersecție al diagonalelor.

Rezolvare.



$P=4l=60$, de aici rezultă că $l=60:4=15$ cm.
Deci AB=BC=CD=DA=15 cm.
Într-un romb, diagonalele sunt și bisectoare.
Dacă $\measuredangle ADB$ este de 30^o și DB este bisectoare rezultă că $\measuredangle ADB = \measuredangle ADC/2$. De aici obținem că:
$\measuredangle ADC = 2 \cdot \measuredangle ADB = 2 \cdot 30^o = 60^o$.
Triunghiul ADC este isoscel (pentru că AD=DC) și are un unghi de 60^o. În consecință triunghiul ADC este echilateral și AD=DC=AC=15 cm.
Punctul O este mijlocul lui AC (pentru că diagonalele se înjumătățesc) și de aici obținem că AO=AC/2=15/2=7,5 cm.

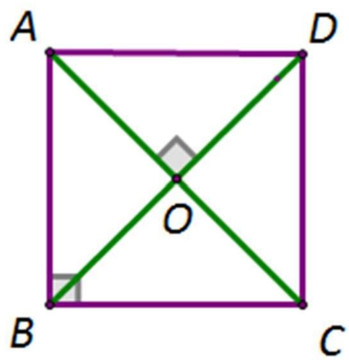
Temă

Problema 1. Aflaţi latura unui romb cu perimetrul de 14 cm.

Problema 2. Fie rombul ABCD cu măsura unghiului DAB egală cu 120°. Ştiind că diagonala AC are lungimea egală cu 7 cm, aflaţi perimetrul rombului.

Patratul

Putem defini un pătrat în două moduri:
1. **Patratul** este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.
2. **Patratul** este rombul cu un unghi drept.



Pătratul

Proprietățile pătratului

- are laturile opuse paralele două câte două AB || CD, AD || BC;
- are toate laturile congruente: AB ≡ BC ≡ CD ≡ DA;
- are toate unghiurile congruente, având măsura egală cu 90°;
- diagonalele sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare;
- diagonalele se înjumătățesc: AO ≡ OC, BO ≡ OD;
- diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor.

Cum demonstrăm că un patrulater este patrat? Un patrulater este patrat dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- este paralelogram cu două laturi consecutive congruente şi un unghi drept (vezi şi lecția „Paralelogramul");
- este paralelogram cu diagonalele congruente şi perpendiculare;
- este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente.

Perimetrul patratului

Dacă notăm latura pătratului cu l, atunci perimetrul patratului se calculează după următoarea formulă:
$P = 4l$.

Aria patratului

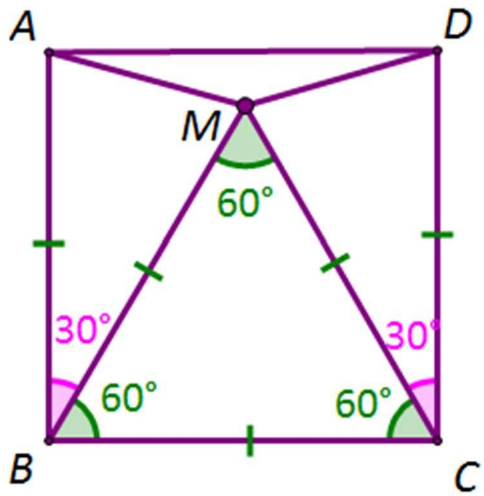
Formula de calcul pentru aria unui patrat este:
$A = l^2$.

Probleme rezolvate

Problema 1. Aflați lungimea laturii unui pătrat cu perimetrul de 22 cm.
Rezolvare. $P = 4l = 22$
$l = 22:4$
$l = 5{,}5$ cm.

Problema 2. Un dreptunghi are lățimea egală cu 60% din latura unui pătrat al cărui perimetru este 120 cm. Știind că cele două patrulatere au același perimetru, aflați lungimea dreptunghiului.
Rezolvare.
Notăm cu l– lățimea dreptunghiului, cu L– lungimea dreptunghiului și cu x– latura pătratului.
$P_{pătrat} = 4x = 120$
$x = 120:4$
$x = 30$;
$l = 60\%$ din x
$l = 60/100 \cdot 30 = 18$.
$P_{dreptunghi} = 2l + 2L = P_{pătrat} = 120$
$2l + 2L = 120$
$2 \cdot 18 + 2L = 120$
$36 + 2L = 120$
$2L = 120-36$
$2L = 84$
$L = 84:2$
$L = 42$ cm.

Problema 3. Fie ABCD un pătrat, iar M un punct situat în interiorul acestuia astfel încât triunghiul MBC este echilateral. Aflați măsura unghiului AMD.
Rezolvare.



Dacă ABCD este pătrat, atunci ∡B=∡C=90°.
Dacă MBC e triunghi echilateral, atunci ∡MBC=∡MCB=∡BMC=60°.
∡ABM=∡DCM=90°-60°=30°
MB=MC=BC pentru că triunghiul MBC este echilateral; dar BC=AB=DC pentru că ABCD este pătrat; de aici rezultă că AB=MB=MC=DC, deci triunghiurile ABM și DCM sunt isoscele.
Un triunghi isoscel are unghiurile alăturate bazei congruente, deci ∡AMB=∡MAB=(180°-30°):2=75°
Analog ∡DMC=∡MDC= (180°-30°):2=75° ;
∡AMD=360°-(75°+60°+75°)=150°.

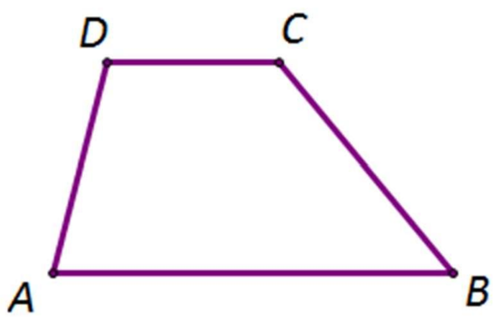
Acum e rândul tău Încearcă să rezolvi singur următoarele probleme. Dacă ai reușit, scrie-ne și nouă răspunsurile într-un comentariu.

Temă.
Problema 1. Aflați latura unui pătrat cu perimetrul de 34 cm.
Problema 2. Un dreptunghi are lățimea egală cu două treimi din latura unui pătrat al cărui perimetru este 36 cm. Știind că cele două patrulatere au același perimetru, aflați lungimea dreptunghiului.

Trapezul

Trapezul este patrulaterul convex care are două laturi paralele și două neparalele.

Laturile paralele se numesc *baze*. În figura de mai jos, AB este *baza mare*, iar CD este *baza mică*.



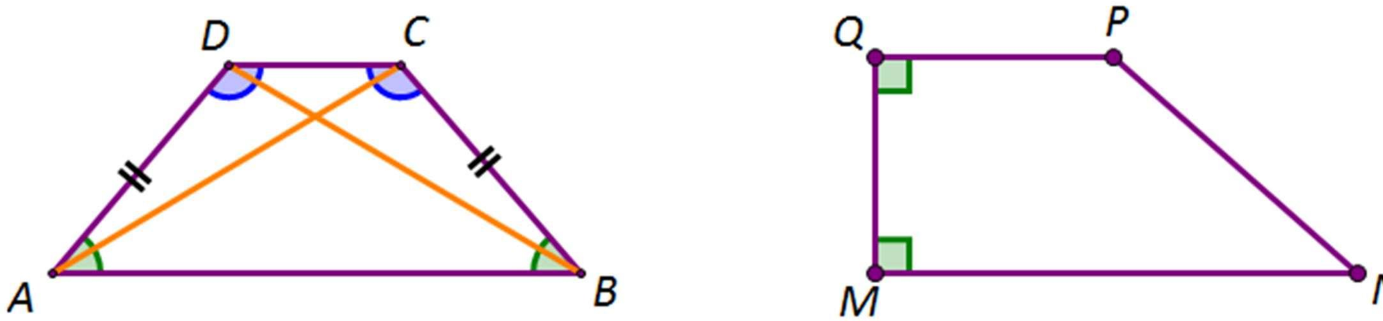
ABCD trapez, AB||CD

Proprietate. În orice trapez, unghiurile alăturate laturilor neparalele sunt suplementare:

$$\measuredangle A + \measuredangle D = 180^{o};$$
$$\measuredangle B + \measuredangle C = 180^{o}.$$

Clasificarea trapezelor:

- *trapez oarecare*– are laturile de lungimi diferite;
- *trapez dreptunghic*– are una din laturile neparalele perpendiculară pe baze;
- *trapez isoscel*– are laturile neparalele congruente.



Trapezul ABCD este isoscel, iar trapezul MNPQ este dreptunghic.

Definiție. Trapezul cu laturile neparalele congruente se numește *trapez isoscel.*

Proprietățile trapezului isoscel

Într-un trapez isoscel, au loc următoarele proprietăți:

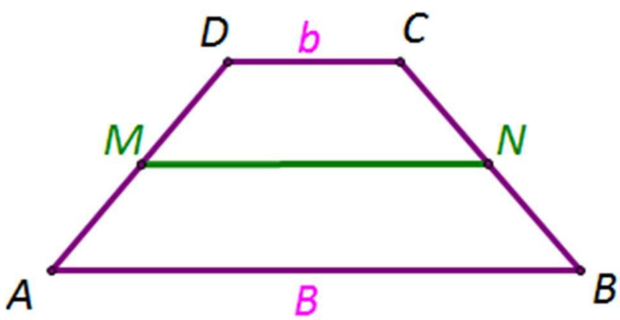
- unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente: $\measuredangle A \equiv \measuredangle B$; $\measuredangle D \equiv \measuredangle C$;
- diagonalele sunt congruente: $AC \equiv BD$.

Cum demonstrăm că un trapez este isoscel? Pentru a demonstra că un patrulater este trapez isoscel, arătăm că acesta are două laturi paralele și că este îndeplinită una din următoarele condiții:

- are laturile neparalele congruente;
- unghiurile de la bază sunt congruente;
- are diagonalele congruente.

Linia mijlocie în trapez

Linia mijlocie a unui trapez este segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele.



MN este linie mijlocie în trapezul ABCD

În figura de mai sus, M este mijlocul laturii AD, iar N este mijlocul laturii BC. Așadar MN este linia mijlocie a trapezului ABCD.

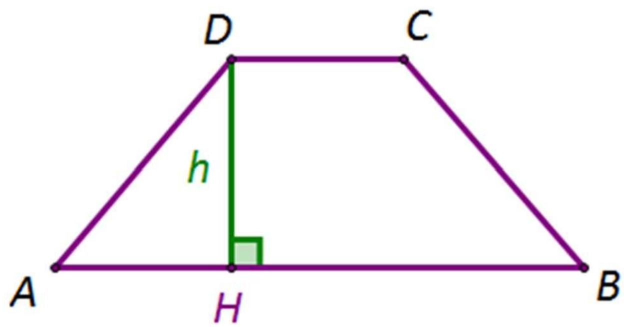
Notăm baza mare a trapezului AB=*B* și baza mică CD=*b*. Atunci linia mijlocie se poate calcula după formula:

\textcolor{blue} {l_m=\frac{B+b}{2}}.l_m=2B+b.

Înălțimea unui trapez

Înălțimea unui trapez este distanța dintre cele două baze (perpendiculara dusă dintr-un punct al unei baze pe cealaltă bază).

În figura de mai jos, DH este înălțimea trapezului ABCD.



DH este înălțime în trapezul ABCD

Perimetrul trapezului

Perimetrul trapezului ABCD este suma lungimilor laturilor.

$$P = AB+BC+CD+DA.$$

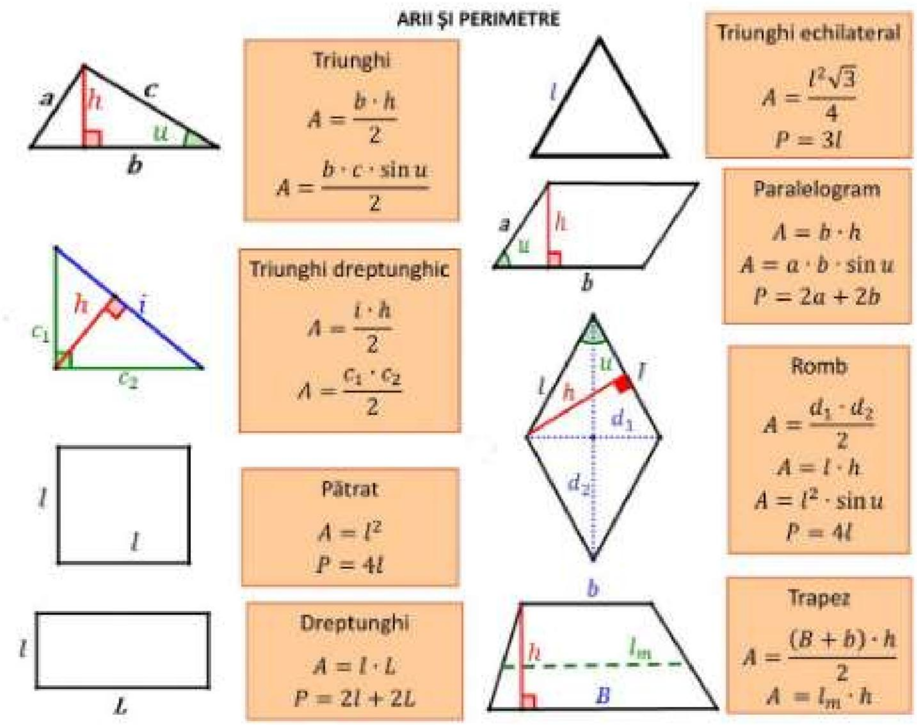
Aria trapezului

Aria trapezului ABCD din figura de mai sus se calculează astfel:

$A=2(AB+CD)\cdot DH$.

În general, dacă notăm baza mare a unui trapez cu B, baza mică cu b, iar înălțimea cu h, atunci formula de calcul pentru aria trapezului este:

$A= (B+b)\cdot h /2$.



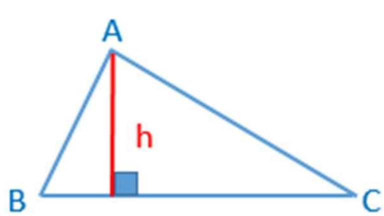
Formulele pentru aria triunghiului si ariile patrulaterelor, perimetre

Probleme rezolvate – Formule pentru arii și perimetre

Problema 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, având lungimile catetelor de 6 cm, 8 cm și ipotenuza de 10 cm. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

Rezolvare:

Scriem aria triunghiului ABC în două moduri și egalăm valorile obținute:



$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$$
$$A_{\Delta ABC} = \frac{h \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot 10}{2} = 5h$$
$$5h = 24 \Longrightarrow h = 24 : 5 = 4{,}8\ cm.$$

sau, putem aplica direct formula:

h=\frac{c_1\cdot c_2}{ip}.$h=ipc_1\cdot c_2$.

Problema 2. Aflați aria unui dreptunghi cu lățimea de 4 cm și lungimea de trei ori mai mare decât lățimea.

Rezolvare:

$l=4$ cm;
$L=3\cdot l=3\cdot 4=12$ cm;
$A=l\cdot L=4\cdot 12=48$ cm^2.

Problema 3. Aflați aria unui romb ABCD știind că diagonala BD = 3 cm și diagonala AC are lungimea de două ori mai mare decât BD.

Rezolvare:

AC = 2BD = $2\cdot 3$ = 6 cm.
A = (AC·BD):2 = (3 · 6):2=9 cm^2.

Problema 4. Aria unui trapez este egală cu 30 cm^2. Aflați suma bazelor trapezului, știind că înălțimea sa este de 4 cm.

Rezolvare:

$A=[(B+b)\cdot h]:2$
$[(B+b)\cdot 4]:2=30 \Rightarrow 4(B+b)=30\cdot 2 \Rightarrow 4(B+b)=60 \Rightarrow B+b=60:4=15$ cm.

Distanţa dintre două puncte în plan

Distanţa dintre două puncte în plan se măsoară cu ajutorul riglei, dar se poate determina şi în funcţie de coordonatele celor două puncte. În această lecţie vom învăţa să calculăm distanţa dintre două puncte şi să determinăm coordonatele mijlocului unui segment.

Prin ***sistem de axe ortogonale*** înţelegem un sistem format din două axe perpendiculare, având aceeaşi origine – punctul O şi aceeaşi unitate de măsură. Un astfel de sistem se mai numeşte şi ***reper cartezian*** şi este folosit pentru a determina poziţia unui punct în plan, atunci când se cunosc coordonatele sale. Axa Ox se numeşte axa absciselor, iar axa Oy se numeşte axa ordonatelor.

Dacă $A(x_A,y_A)$ şi $B(x_B,y_B)$ sunt două puncte în plan, atunci distanţa dintre ele se calculează folosind formula:

$$AB=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

Dacă punctul $M(x_M,y_M)$ este mijlocul segmentului AB, atunci coordonatele acestui punct se vor calcula folosind formulele:

$$x_M=2x_A+x_B, y_M=2y_A+y_B$$

o Cercul: constructie, elemente

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Cercul

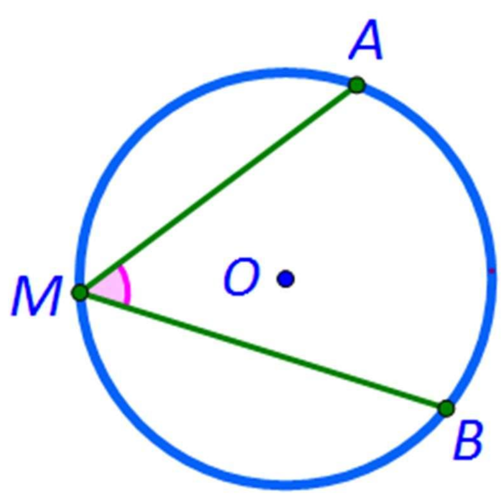
Definițiile elementelor unui cerc

- Un *arc de cerc* este o porțiune dintr-un cerc delimitată de două puncte.
- Un *disc* este regiunea planului delimitată de un cerc (aflată în interiorul acestuia).
- O *rază* este un segment de dreaptă care conectează centrul unui cerc cu orice punct de pe acesta. Lungimea acestuia se notează de obicei cu "r" sau "R".
- O *coardă* este un segment de dreaptă determinat de două puncte de pe cerc.
- Un *diametru* este o coardă care trece prin centrul cercului. Diametrul este compus din două raze coliniare, lungimea sa fiind de 2R.
- O *săgeată* este un segment trasat perpendicular pe o coardă, situat între mijlocul corzii și circumferința cercului.
- Un *sector de cerc* este o parte a discului cuprins între două raze.
- Un *segment de cerc* este o regiune a discului delimitată de un arc de cerc și o coardă care au extremități comune.
- Un *unghi la centru* este un unghi format de două raze ale cercului.

Unghi înscris în cerc

Un unghi cu vârful pe cerc și care are ca laturi două coarde ale cercului se numește unghi înscris în cerc.

În figura de mai jos, unghiul AMB este unghi înscris în cerc.



Unghiul AMB este înscris în cerc

Important: Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.

Unghiul AMB=arc AB / 2

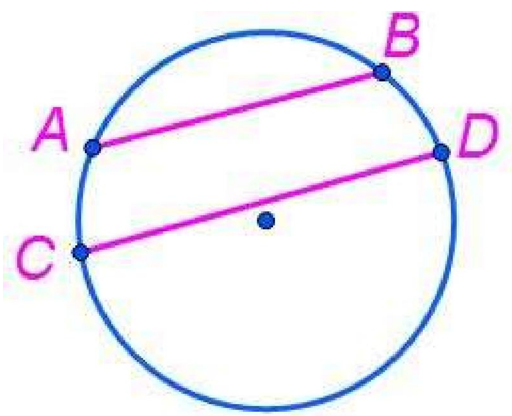
Consecință:

Un unghi înscris într-un semicerc este unghi drept (pentru că un semicerc are 180 de grade, iar $180^o:2=90^o$).

Proprietăți referitoare la arce și coarde în cerc

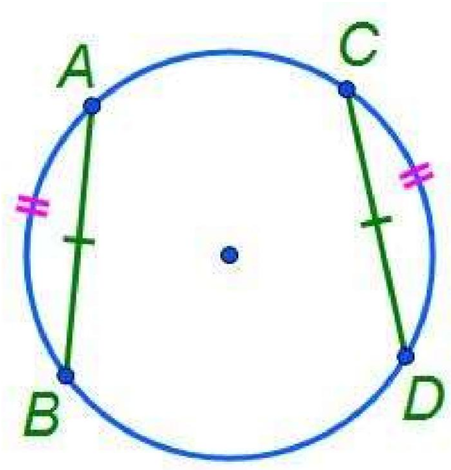
1. Într-un cerc, două coarde paralele determină două arce congruente.

$AB \| CD \Rightarrow$arcul $AC \equiv$ arcul BD



2. Într-un cerc, la arce congruente corespund coarde congruente.

Arcul $AB \equiv$ arcul $CD \Rightarrow AB \equiv CD$.

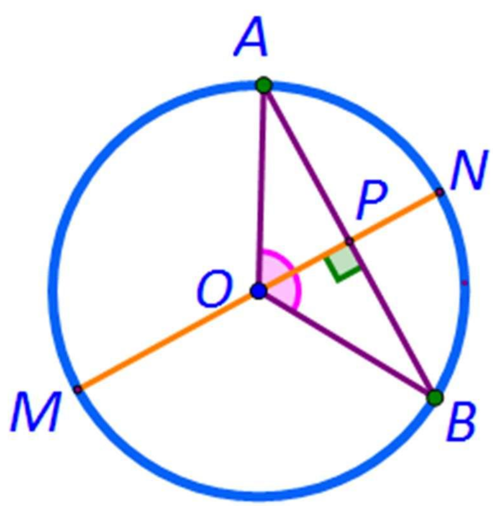


3. Într-un cerc, la coarde congruente corespund arce congruente.

$AB \equiv CD \Rightarrow$arcul $AB \equiv$ arcul CD

4. (Proprietatea diametrului perpendicular pe o coardă). Un diametru perpendicular pe o coardă va trece prin mijlocul acesteia și prin mijlocul arcului determinat de coardă.

În figura de mai jos, MN este diametrul perpendicular pe coarda AB. Atunci el trece prin punctul P, mijlocul coardei AB, iar punctul N va fi mijlocul arcului mic AB.



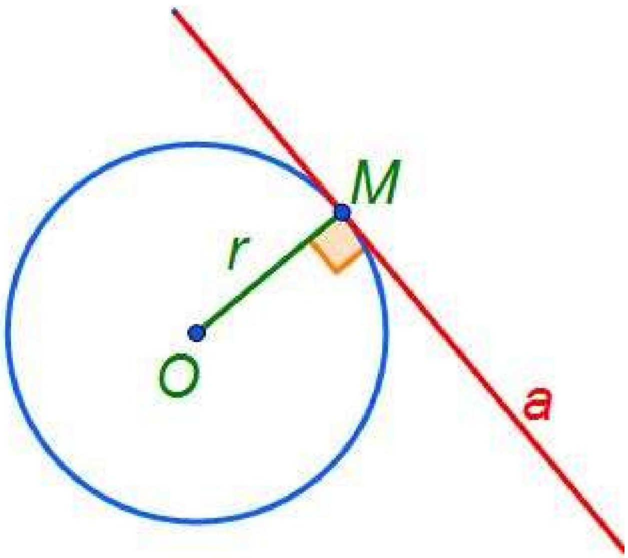
Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

Tangenta la cerc este o dreaptă care intersectează cercul într-un punct. Ea are o proprietate importantă:

Tangenta la cerc este perpendiculară pe rază în punctul de tangență.

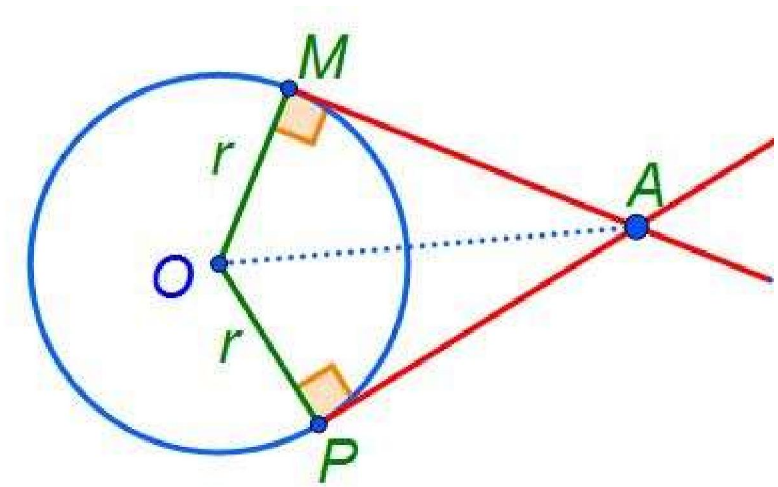
În figura de mai jos, dreapta a este tangentă cercului, iar M este punctul de tangență. Atunci:

OM \perp a$OM \perp a$



Teorema “*ciocului de cioară*“. Fie A un punct exterior unui cerc. Dacă AM și AP sunt tangentele duse din A, atunci segmente AM și AP sunt congruente.

AM, AP \quad tangente \Rightarrow AM \equiv AP$AM, AP tangente \Rightarrow AM \equiv AP$



Lungimea cercului și aria cercului (discului)

Lungimea unui cerc se calculează folosind formula:

$L=2\pi r$.

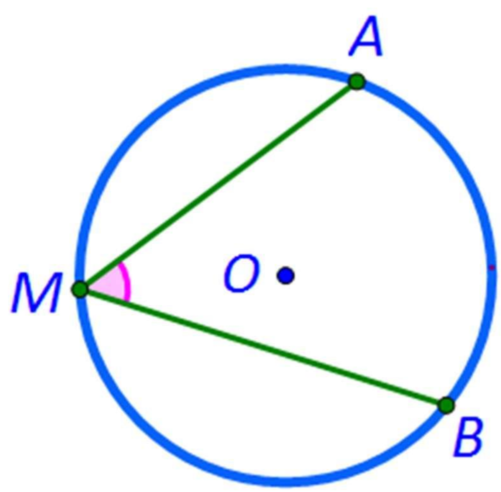
unde r este raza cercului, iar π (pi) este un număr irațional, având o valoare aproximativ egală cu 3,14. Constanta π este prin definiție, raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său.

Aria cercului se calculează folosind formula:

$=\pi r^2$.

Probleme rezolvate cu cercul

1. În figura de mai jos, arcul mic AB are măsura egală cu 106 grade. Aflați măsura unghiului AMB.

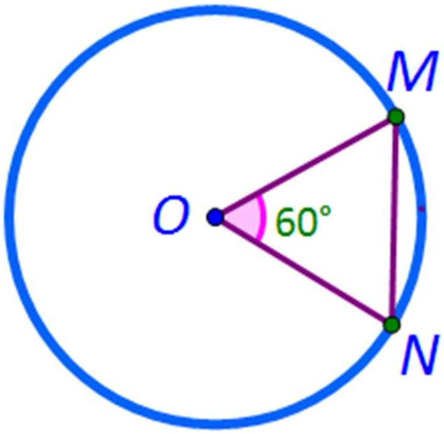


Rezolvare:

$$\sphericalangle AMB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{106°}{2} = 53°.$$

2. Pe cercul de centru O și rază $r = 18$ cm, se consideră punctele M și N astfel încât măsura unghiului MON este de 60 de grade. Aflați lungimea coardei MN.

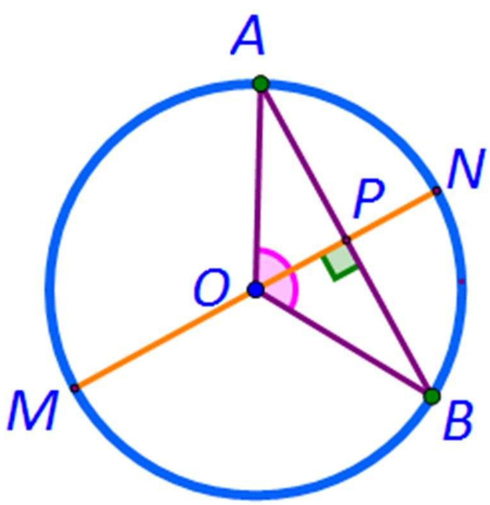
Rezolvare:



Dacă OM=ON=r=18 cm, atunci triunghiul MON este isoscel. În acest triunghi, unghiul MON are măsura de 60 de grade, prin urmare triunghiul este echilateral și MN=OM=ON=18 cm.

3. Pe cercul de centru O și rază r=12 cm, se consideră punctele A și B astfel încât măsura unghiului AOB să fie egală cu 120 de grade. Fie MN un diametru perpendicular pe coarda AB și fie P punctul de intersecție dintre diametrul MN și coarda AB. Aflați lungimea segmentelor OP și AB.

Rezolvare:



Dacă OA=OB=r=12 $\Longrightarrow$ triunghiul AOB isoscel și OP este înălțime, mediană și bisectoare.

$$\sphericalangle AOP = \sphericalangle AOB : 2 = 120° : 2 = 60° \Longrightarrow \sphericalangle OAP = 30°.$$

În triunghiul dreptunghic AOP, cateta OP este opusă unghiului de 30 de grade, prin urmare ea va fi jumătate din ipotenuză: OP=AO:2=12:2=6 cm.

Pentru a afla AP, aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul AOP:

$$OP^2 + AP^2 = AO^2$$
$$6^2 + AP^2 = 12^2$$
$$36 + AP^2 = 144$$
$$AP^2 = 108$$
$$AP = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$
$$AB = 2AP = 2 \cdot 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ cm.$$

o Corpuri geometrice: paralelipidedul, cubul, piramida, cilindrul, conul, sfera (recunoastere, elemente componente, constructie); arie si volum: paralelipided, cub, piramida

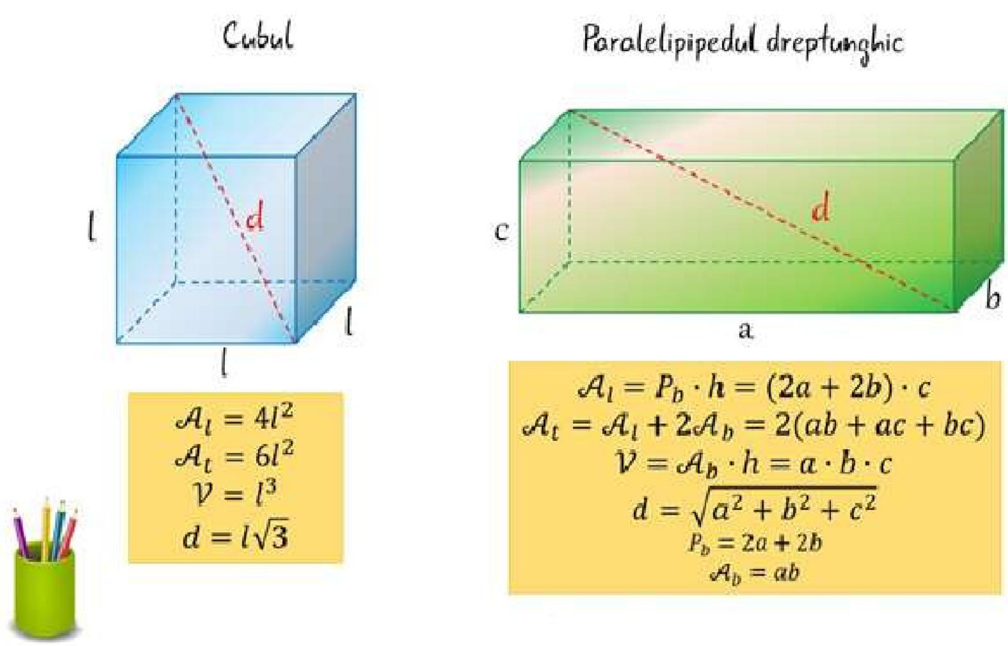
Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Cubul şi paralelipipedul dreptunghic

Paralelipipedul dreptunghic este o prismă patrulateră dreaptă cu toate fețele dreptunghiuri.

Cubul este prisma dreaptă cu toate fețele pătrate.

Aria cubului şi volumul cubului. Aria şi volumul paralelipipedului dreptunghic



Formule pentru aria și volumul cubului și a paralelipipedului dreptunghic

Probleme rezolvate

Problema 1

Aflați aria totală și volumul unui cub cu latura de 3 cm.

Rezolvare:

$A_t = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = 54$ cm^2
$V = l^3 = 3^3 = 27$ cm^3.

Problema 2

Aflați aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 3 cm, 6 cm și 4 cm.

Rezolvare:

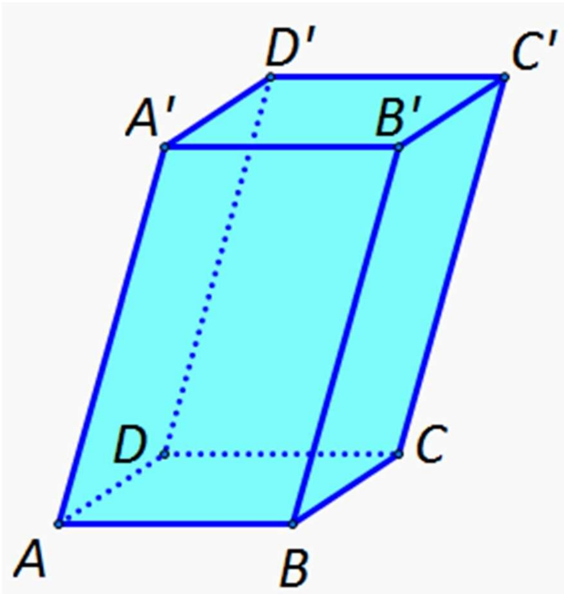
$A_t = 2(3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 4) = 2(18+12+24) = 108$ cm^2
$V = 3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ cm^3.

Prisma regulată dreaptă(nu se cere)

Un **poliedru** este un corp mărginit de suprafețe plane. Fețele poliedrului sunt poligoane.

Prisma este un poliedru având două baze- poligoane egale, iar fețele laterale sunt paralelograme și muchiile laterale sunt egale între ele.

În figura de mai jos, avem un exemplu de prismă având bazele dreptunghiurile ABCD și A'B'C'D'. În funcție de numărul de laturi ale poligonului de la bază, prismele se clasifică în prisme triunghiulare, prisme patrulatere, prisme pentagonale, hexagonale, etc. În figura de mai jos avem o prismă patrulateră.



Prisma

O **prismă dreaptă** este o prismă cu muchiile laterale perpendiculare pe planul bazei. În acest caz, fețele laterale ale prismei sunt dreptunghiuri.

O **prismă regulată** este o prismă având bazele poligoane regulate (*ex*: triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat).

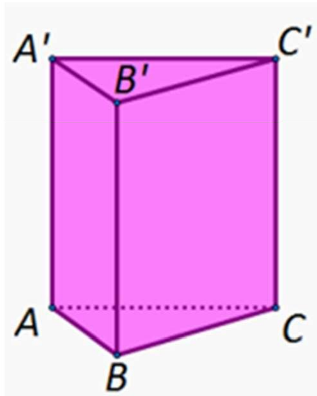
Înălțimea unei prisme este distanța dintre planele bazelor. În cazul prismei drepte, înălțimea este egală cu muchiile laterale.

În continuare vom discuta despre *prisme regulate drepte.* O să vedem care sunt formulele pentru aria și volumul prismei triunghiulare, aria și volumul prismei patrulatere și a prismei hexagonale.

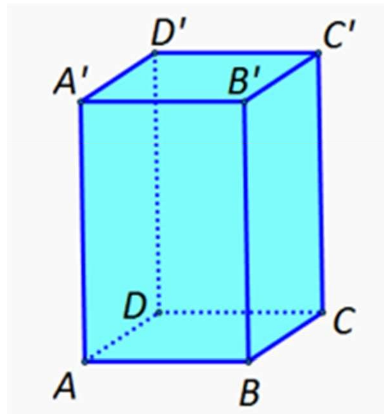
Aria laterală, aria totală și volumul prismei regulate

$$A_l = P_b \cdot h$$
$$A_t = A_l + 2A_b$$
$$V = A_b \cdot h$$

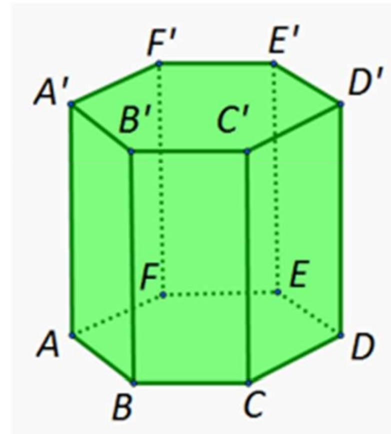
unde: A_l – aria laterală, P_b – perimetrul bazei, h – înălțimea primei, A_t – aria totală, A_b – aria bazei, V – volumul.



Prisma triunghiulară



Prisma patrulateră



Prisma hexagonală

Prisma triunghiulara, prisma patrulatera, prisma hexagonala

Formulele de mai sus sunt valabile pentru orice tip de prismă, iar perimetrul bazei și aria bazei se calculează în funcție de poligonul de la bază.

Prisma triunghiulară regulată are baza triunghi echilateral. Formulele pentru perimetrul bazei și aria bazei sunt:

$$\boxed{P_b = 3l;\ \mathcal{A}_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.}$$

Perimetru și arie triunghi echilateral

Prisma patrulateră regulată are baza pătrat. Formulele pentru perimetrul bazei și aria bazei sunt:

$$\boxed{P_b = 4l;\ \mathcal{A}_b = l^2.}$$

Perimetru și arie pătrat

Prisma hexagonală regulată are baza hexagon. Formulele pentru perimetrul bazei și aria bazei sunt:

$$\boxed{P_b = 6l;\ \mathcal{A}_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}.}$$

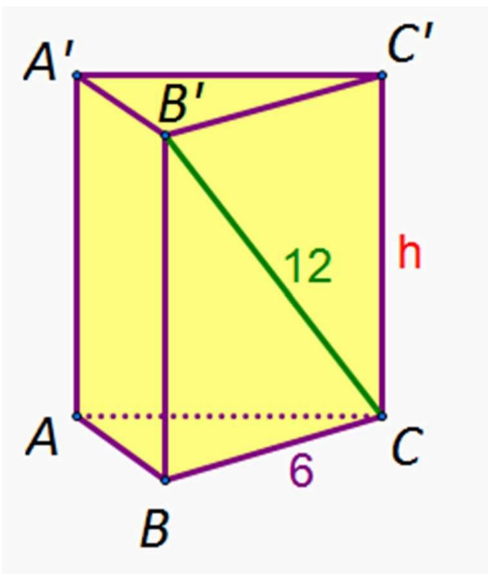
Perimetru și arie hexagon

Probleme rezolvate cu prisma regulata dreapta-nu se cere

Problema 1

O prismă triunghiulară regulată dreaptă are latura bazei de 6 cm și diagonala unei fețe laterale de 12 cm. Aflați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

Rezolvare:



Prisma triunghiulara regulata

Vom afla mai întâi înălțimea prismei *h*=C'C=B'B. Fețele laterale ale unei prisme drepte sunt dreptunghiuri, prin urmare unghiul B'BC este drept și putem aplica teorema lui Pitagora în triunghiul B'BC:

$B'B^2+BC^2 = B'C^2$

$B'B^2+6^2 = 12^2$

$B'B^2 = 144-36 = 108$

$$\mathrm{B'B} = h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Baza prismei este triunghi echilateral, iar perimetrul bazei va fi $P_b=3l=18$ cm. Aria laterală a prismei este perimetrul bazei ori înălțimea și vom obține:

$$A_l = P_b \cdot h = 18 \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}\, cm^2$$

În continuare vom calcula aria bazei (aria triunghiului echilateral):

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

Aria totală a unei prisme este aria laterală plus ariile celor două baze:

$$A_t = Al + 2A_b = 108\sqrt{3} + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 126\sqrt{3}\ cm^2$$

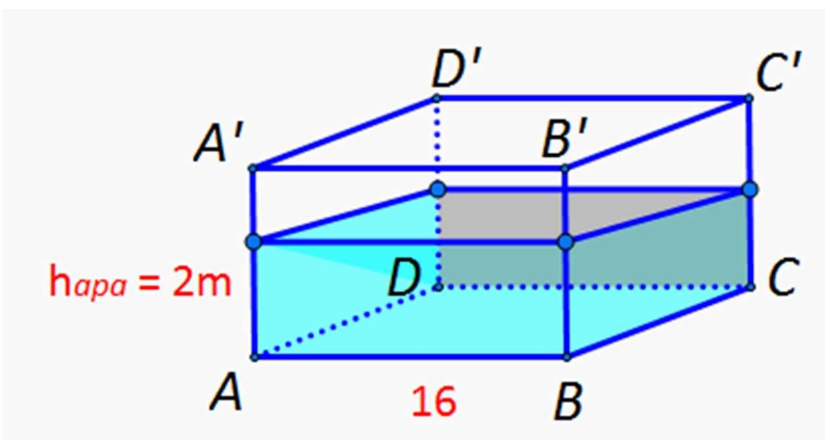
Volumul prismei este produsul dintre aria bazei și înălțime:

$$V = A_b \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 162\ cm^3.$$

Problema 2

O piscină are forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 16 m și înălțimea de 2,5 m. Baza piscinei și pereții laterali se acoperă cu plăci de mozaic. Aflați aria suprafeței ce trebuie acoperită cu mozaic și câți litri de apă intră în piscină, știind că se toarnă apă până la înălțimea de 2 m.

Rezolvare:



Prisma patrulatera regulata

Baza piscinei este un pătrat cu latura de 16 m și vom afla mai întâi perimetrul bazei: $P_b=4\cdot16=64$ m.

Să aflăm acum aria laterală a prismei și aria bazei:

$$A_l = P_b \cdot h = 64 \cdot 2{,}5 = 160\ m^2$$

$$A_b = l^2 = 16^2 = 256\ m^2$$

Aria suprafeței acoperită cu mozaic este aria laterală împreună cu aria bazei. *Atenție!* Nu vom aduna două baze, ca și în formula de mai sus, ci doar una, deoarece piscina nu este acoperită.

$$A_{mozaic} = Al + A_b = 160 + 256 = 416\, m^2$$

Volumul apei se calculează înmulțind aria bazei cu înălțimea la care se ridică apa (h=2m):

$$V = A_b \cdot h = 256 \cdot 2 = 512\, m^3 =$$
$$= 512000\, dm^3 = 512000\, litri.$$

Piramida regulată

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Un poligon regulat este un poligon cu toate laturile și toate unghiurile congruente (de exemplu pătratul sau triunghiul echilateral).

Piramida regulată este o piramidă cu baza poligon regulat și care are muchiile laterale congruente. În consecință, fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele.

Piramida patrulatera regulată este piramida cu baza pătrat și muchiile laterale congruente (fețele laterale sunt triunghiuri isoscele).

Piramida triunghiulara regulată este piramida cu baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente (fețele laterale sunt triunghiuri isoscele).

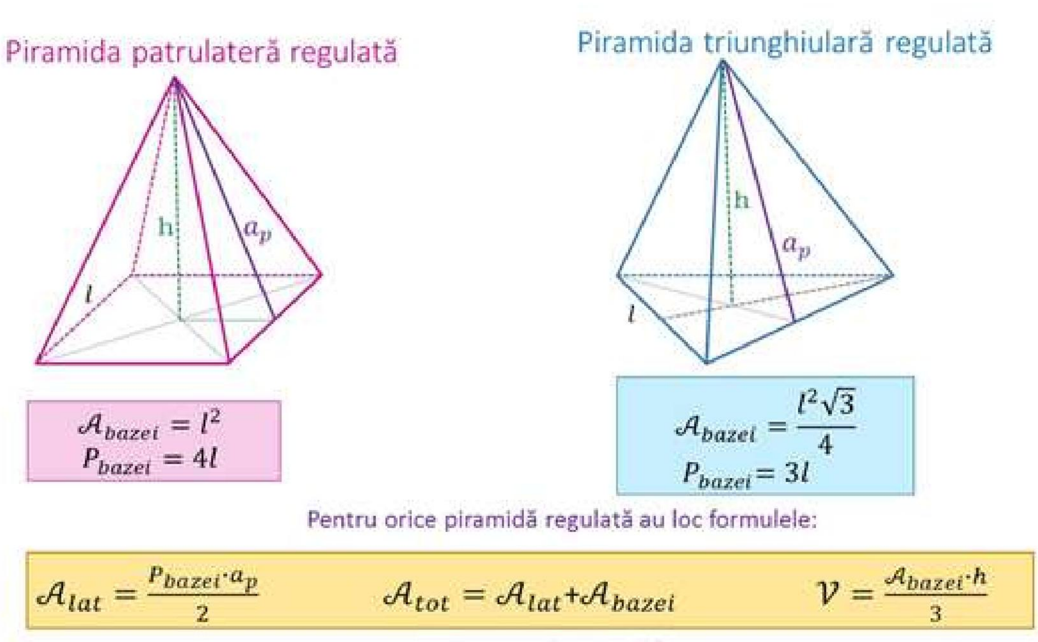
Tetraedrul regulat este o piramidă triunghiulară regulată având muchia laterală egală cu muchia bazei. Așadar, un tetraedru regulat are toate muchiile egale și toate fețele sunt triunghiuri echilaterale.

Apotema piramidei (notăm a_p) este înălțimea unei fețe laterale.

Înălțimea piramidei (o notăm cu h) este distanța de la vârful piramidei la planul bazei.

Aria și volumul piramidei patrulatere regulate. Aria și volumul piramidei triunghiulare regulate

Aria laterală a unei piramide este suma ariilor fețelor laterale. *Aria totală* a piramidei este egală cu aria laterală la care se adună aria bazei. *Volumul* unei piramide este o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei. Iată formulele pentru aria și volumul unei piramide regulate:



Aria laterală, aria totală și volumul piramidei

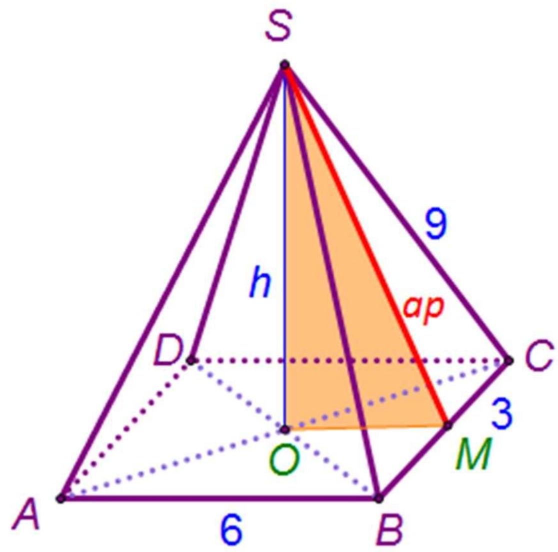
Probleme rezolvate cu Piramida regulată Aria și volumul piramidei

Problema 1

Fie SABCD o piramidă patrulateră regulată cu baza ABCD. Dacă latura bazei are lungimea egală cu 6 cm și muchia laterală este de 9 cm, aflați aria totală și volumul piramidei.

Rezolvare:

Fie SM apotema piramidei, SM⊥BC. Triunghiul SBC este isoscel, prin urmare SM va fi și mediană, deci M este mijlocul laturii BC.



$AB = BC = 6 \Longrightarrow BM = MC = 3\ cm$

ΔSMC dreptunghic în M. Aplicăm T. P

$SM^2 + MC^2 = SC^2 \Longrightarrow SM^2 + 3^2 = 9^2 \Longrightarrow SM^2 + 9 = 81 \Longrightarrow SM^2 = 72$

$\Longrightarrow SM = a_p = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\ cm$

$P_b = 6 \cdot 4 = 24\ cm$

$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{24 \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2}\ cm^2.$

$A_t = A_l + A_b = 72\sqrt{2} + 6^2 = 36(1 + 2\sqrt{2})\ cm^2.$

ΔSOM dreptunghic în O; $OM = \frac{AB}{2} = 3\ cm.$ Aplicăm T. P:

$SO^2 + OM^2 = SM^2 \Longrightarrow SO^2 + 3^2 = 72 \Longrightarrow SO^2 = 63 \Longrightarrow SO = h = 3\sqrt{7}\ cm$

$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{7}}{3} = 36\sqrt{7}\ cm^3.$

Cilindrul și sfera

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Cilindrul circular drept

O dreaptă care se rotește în spațiu păstrându-și direcția și care se sprijină pe un cerc, descrie o *suprafață cilindrică circulară*. **Cilindrul circular** este un corp mărginit de o suprafață cilindrică și de două plane paralele. Dreapta care generează suprafața cilindrică se numește **generatoare**. Cele două secțiuni determinate de planele paralele cu suprafața cilindrică se numesc **bazele cilindrului.** Distanța dintre planele bazelor se numește **înălțimea cilindrului.** Dacă unghiul format de generatoare cu bazele este unghi drept, atunci se formează un **cilindru circular drept.**

Conductele de apă sau petrol, cisternele, cazanele de presiune- toate acestea au formă cilindrică.


Forme cilindrice

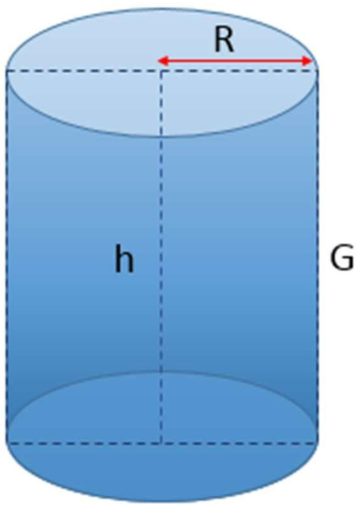
Foto credit: Pixabay


Forme cilindrice

Foto credit: Pixabay

În continuare o să vedem care sunt elementele cilindrului circular drept și formulele pentru aria cilindrului și volumul cilindrului. Articolul se continuă mai jos cu *sfera*.

Elementele cilindrului circular drept



Cilindrul circular drept

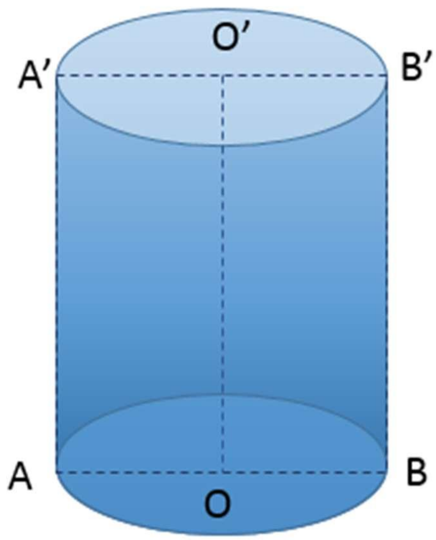
Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului

$$A_l = 2\pi RG$$
$$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G+R)$$
$$V = \pi R^2 h$$

- *Bazele*– sunt două cercuri congruente, cu rază R, situate în plane paralele;
- *Generatoarea cilindrului* (*G*)- dreapta care generează suprafața laterală a cilindrului;
- *Înălțimea cilindrului* (*h*)- distanța dintre baze. În cazul cilindrului circular drept, înălțimea este egală cu generatoarea h=G.

Dacă notăm cu R razele cercurilor de la baze, atunci suprafața laterală a unui cilindru circular drept se desfășoară după un *dreptunghi* având lățimea egală cu generatoarea $l=G$ și lungimea egală cu lungimea cercului, adică $L=2\pi R$.

Dreapta care unește centrele bazelor unui cilindru este **axă de simetrie** a cilindrului, iar un plan care conține axa de simetrie se numește **plan de simetrie** al cilindrului. Secțiunea unui cilindru cu un plan de simetrie se numește **secțiune axială**. În figura de mai jos, dreapta OO’ este axă de simetrie, iar dreptunghiul ABB’A’ este secțiunea axială a cilindrului.



ABB'A' este secțiunea axială a cilindrului

Probleme rezolvate cu cilindru

Problema 1

Aflați aria laterală, aria totală și volumul unui cilindru circular drept cu raza de 5 cm și înălțimea de 8 cm.

Rezolvare:

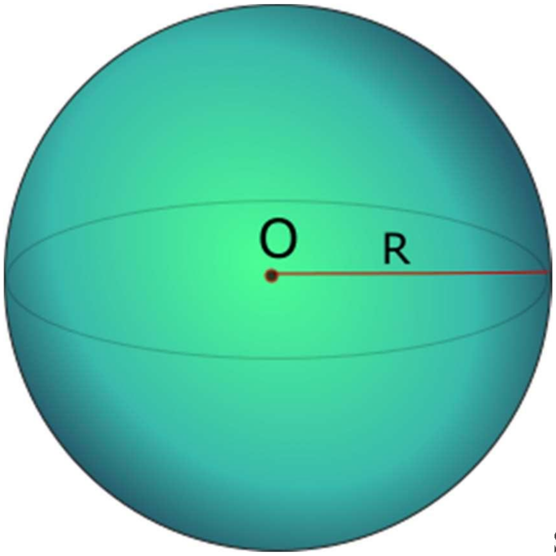
R = 5 cm, h = G = 8 cm

$A_l = 2\pi RG = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$ cm^2
$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi R(G+R) = 2\pi \cdot 5(5+8) = 130\pi$ cm^2

$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 25 \cdot 8 = 200\pi$ cm^3.

Sfera

Sfera de centru O și rază R este mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța R față de punctul O.



Sfera

Aria și volumul sferei

Iată formulele de calcul pentru aria și volumul unei sfere:

$$A = 4\pi R^2$$

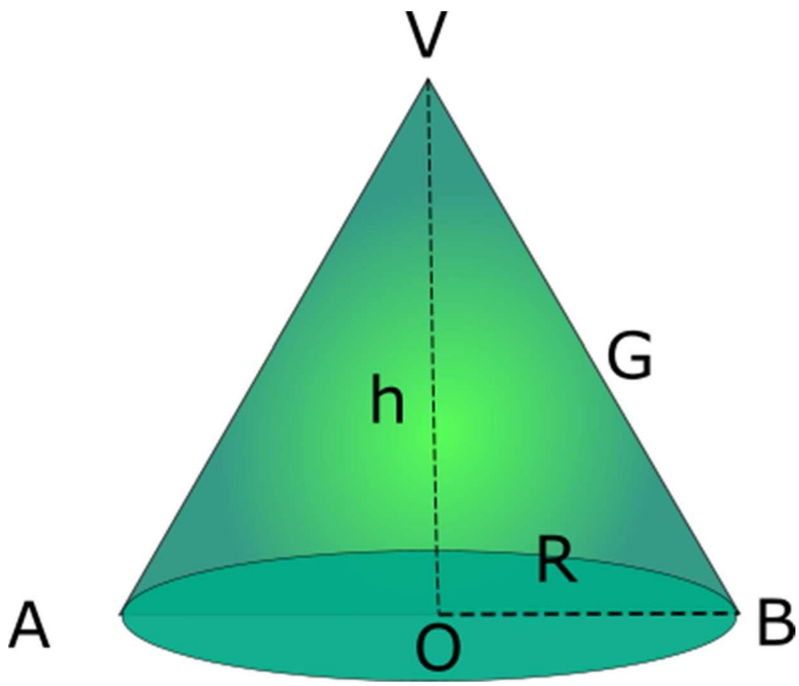
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Aria sferei și volumul sferei

Conul și trunchiul de con circular drept

1.Conul circular drept

O dreaptă numită *generatoare*, care trece printr-un punct fix V și se sprijină pe un cerc descrie o suprafață conică circulară. **Conul circular** este un corp mărginit de o suprafață conică circulară și de un plan care nu trece prin punctul V. Suprafața conică determină pe acest plan *baza conului*, iar punctul V se numește *vârful conului*. Dacă perpendiculara din V pe planul bazei trece prin centrul acesteia, atunci conul circular este drept.



Elementele conului circular drept

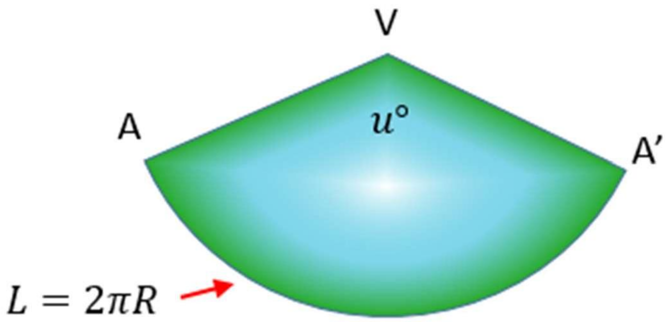
- Baza conului: cercul de centru O și rază R;
- Generatoarea: G = VA = VB;
- Înălțimea conului: distanța de la V la planul bazei: h = VO;

Având în vedere că triunghiul VOB este dreptunghic, are loc următoarea relație între rază, înălțime și generatoare:

$$h^2 + R^2 = G^2$$

Secționând conul cu un plan care conține dreapta VO se obține secțiunea axială a conului. Prin urmare, **secțiunea axială** a conului este triunghiul isoscel VAB.

Suprafața laterală a conului se desfășoară în plan după un *sector circular* a cărui rază este VA, adică generatoarea conului.



Desfășurarea suprafeței laterale a conului

Aria laterală, aria totală și volumul conului circular drept

$$A_l = \pi RG$$
$$A_t = A_l + A_b = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G+R)$$
$$V = \pi R^2 h/3$$

Dacă notăm cu u măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de cerc și egalând aria sectorului cu aria laterală a conului, obținem următoarea relație:

$$u° = 360°\cdot R/G$$

Probleme rezolvate cu conul circular drept

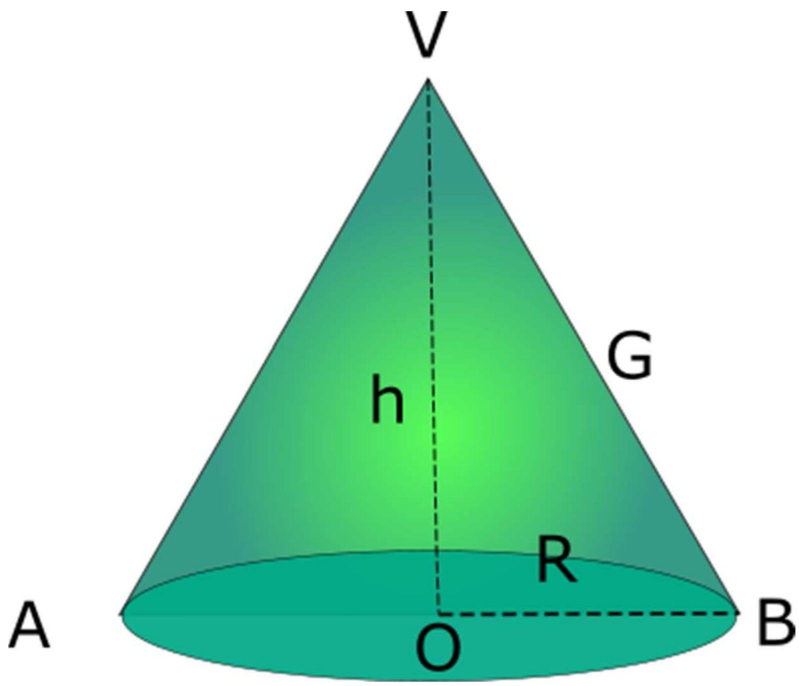
Problema 1

Un con circular drept are perimetrul secțiunii axiale de 36 cm, iar raza cercului de la bază este de 5 cm. Aflați:

a) Aria latelară, aria totală a conului.

b) Volumul conului.

Rezolvare:



a) Secțiunea axială este triunghiul isoscel VAB având perimetrul P = 36 cm.

Știm că R = OB = 5 cm, prin urmare AB = AO + OB = 5 + 5 = 10 cm.

P = VA + VB + AB = 2VB + AB = 2G + 10 = 36 cm

2G + 10 = 36

2G = 36 – 10 = 26

G = 26:2 = 13 cm.

$A_l = \pi RG = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi$ cm^2

$A_t = \pi R(G+R) = \pi \cdot 5 \cdot (13+5) = 90\pi$ cm^2

b) Pentru a calcula volumul conului, trebuie mai întâi să aflăm înălțimea h. Pentru aceasta vom aplica teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOB:

$VO^2 + OB^2 = VB^2$

$h^2 + R^2 = G^2$

$h^2 + 5^2 = 13^2$

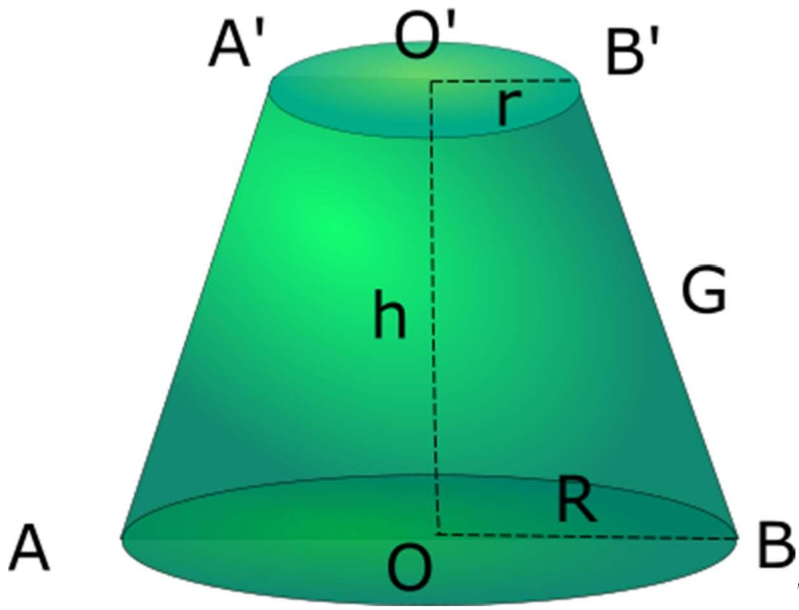
$h^2 = 169 - 25 = 144$ și obținem că h = 12 cm.

$V = \pi R^2 h/3 = \pi \cdot 25 \cdot 12/3 = 100\pi$ cm^3.

2. Trunchiul de con circular drept-nu se cere

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

Trunchiul de con circular drept este corpul obținut prin secționarea unui con circular drept cu un plan paralel cu baza și îndepărtarea conului de sus.



Trunchiul de con circular drept

Elementele trunchiului de con circular drept

- Baza mare: cercul de centru O și rază R;
- Baza mică: cercul de centru O’ și rază r;
- Generatoarea: G = AA’ = BB’;
- Înălțimea: distanța dintre cele două baze: h = O’O.

Secțiunea axială a trunchiului de con circular drept este trapezul isoscel ABB’A’.

Aria laterală, aria totală și volumul trunchiului de con circular drept

$$A_l = \pi G(R + r)$$
$$A_t = A_l + A_B + A_b = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$
$$V = \pi h(R^2 + r^2 + Rr)/3.$$

7. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Prof Dr Bogdan C tin , Cepoi Delia

1. METODICA PREDĂRII UNITĂŢII DE ÎNVĂŢARE „METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR”

Calea aritmetică de rezolvare a unei probleme spre deosebire de cale algebrică are bogate valenţe formative în procesul de învăţământ .Predarea metodelor aritmetice de rezolvare a problemelor se face atât din punct de vedere teoretic , cât şi practic (prin probleme rezolvate). Astfel pentru fiecare metodă se vor prezenta probleme rezolvate, dar şi probleme propuse spre rezolvare, toate însoţite de indicaţii sau răspunsuri. Vor fi alese numai probleme strâns legate de puterea de înţelegere a unui elev de clasa a V-a, de experienţa de viaţă a elevului, de nivelul său intelectual şi mai ales de gradul său de pregătire .În permanenţă profesorul va dirija gândirea elevului spre depistarea acelor date din enunţul problemei care fac ca aceasta să se încadreze într-o anumită categorie de probleme ce se rezolvă după procedee deja cunoscute de elev.

Pentru parcurgerea unităţii de învăţare ,, Metode aritmetice de rezolvare a problemelor “se pot aloca 12 ore , unitatea încheindu-se desigur cu recapitulare şi evaluare.

Competenţe specifice vizate:

C1. Identificarea unei metode aritmetice adecvate pentru rezolvarea unei probleme date;
C2. Reprezentarea datelor dintr-o problemă, în vederea aplicării unei metode aritmetice adecvate;
C3.Aplicarea metodelor aritmetice pentru rezolvarea unor probleme cu numere naturale;
C4.Stabilirea valorii de adevăr a unui enunţ matematic cu numere naturale, folosind metode aritmetice;
C5.Modelarea unor probleme practice utilizând metode aritmetice;
C6.Formularea unor probleme pe baza unor scheme sau reguli date şi rezolvarea acestora prin metode aritmetice.

Deoarece această metodă este foarte accesibilă elevilor vom rezolva cu ajutorul lor, *în munca pe grupe* două probleme.

Problema 1. 12 kg de mere costă 48 lei . Cât costă 7 kg de mere de aceeaşi calitate?

Soluţie. 12 kg……………………………………..48 lei
1kg ………………………………………48:12 = 4 lei
7 kg ……………………………………... $7 \cdot 4 = 28$ lei

Problema 2.12 muncitori termină o lucrare în 15 zile . În câte zile ar fi terminat aceeaşi lucrare 18 muncitori, dacă ar fi lucrat în aceeaşi ritm ca cei 12 ?

<u>*Soluţie*</u>.

12 muncitori ……………………………15 zile …………………………….1 lucrare
1 muncitor ………………………… $12 \cdot 15$ zile……............………………1 lucrare
1 muncitor …………………………....180zile…………………………..........1 lucrare
18 muncitori ……………………… 180:18=10 zile…......…………………1 lucrare

După lucrul pe grupe se va lucra la tablă sub îndrumarea profesorului care va comenta modul de aplicare a metodei.

Elevii sunt conduşi să observe (să descopere) că în *prima problemă* apar mărimi care depind unele de altele astfel: dacă valorile uneia cresc de un anumit număr de ori şi valorile celeilalte cresc de acelaşi număr de ori şi această „dependenţă" ne-a permis să aflăm cât costă 1 kg de mere, adică să aplicăm *metoda reducerii la unitate.*

Desigur prima problemă este mai apropiată de nivelul de înţelegere al elevilor.

Se va insista mai mult la *„dependenţa"* dintre mărimile de la *a doua problemă* (care este mai greu de perceput): aici dacă valorile uneia cresc de un anumit număr de ori, valorile celeilalte scad de acelaşi număr de ori şi pentru reducerea la unitate (1 muncitor) trebuie să facem o operaţie de înmulţire (şi nu de împărţire) ca la prima problemă.

În concluzie dacă într-o problemă există una dintre cele două tipuri de dependenţe (prezentate în rezolvarea problemelor anterioare) aceasta poate fi rezolvată prin *metoda reducerii la unitate.*

În continuare se va propune elevilor :

- Compunerea şi rezolvarea unei probleme asemănătoare problemei 1.
- Rezolvarea **Problemei 3.** Într-un depozit de fructe şi legume, 6 lucrători ambalează merele în pungi. Ei termină de ambalat toate merele în 4 ore. Dacă ar lucra 8 lucrători în acelaşi ritm cu cei 6, în câte ore ar termina de ambalat aceeaşi cantitate de mere?

Se va realiza o *muncă independentă* după care se vor discuta rezultatele .Se va puncta faptul că *la prima cerinţă* se poate porni de la o situaţie practică, cum ar fi de exemplu că 1 kg de struguri costă 8 lei. La *a doua cerinţă* esenţial este faptul că mărimile sunt:numărul de lucrători şi numărul de ore lucrate şi că atunci când numărul de lucrători creşte numărul de ore scade, astfel încât dacă 6 lucrători au nevoie de 4 ore ca să ambaleze toate merele , atunci un singur lucrător are nevoie să lucreze de 4 ori mai mult , adică $4 \cdot 6 = 24$ ore (astfel se realizează *reducerea la unitate*).

Tema pentru acasă

1) Mărind un număr de 7 ori se obţine 294. Cât se obţine dacă mărim acelaşi număr de 3 ori?

<u>*Răspuns:*</u>126

2) 5 m de stofă costă 60 lei . Câţi metri de stofă pot fi cumpăraţi cu 132 de lei.

<u>*Răspuns*</u>:11m

3) Apa curgând din 5 robinete umple un bazin în 18 ore . În cât timp ar putea umple bazinul apa care curge din 3 robinete identice cu primele.

<u>*Răspuns*</u>:30 ore

2. METODA COMPARAȚIEI

Metoda se aplică , în general, la *două tipuri* de probleme :

Tipul 1: Apar 3 mărimi , fiecare dintre ele cu câte două valori numerice date .

Tipul 2: Apar 3 mărimi cu câte o valoare numerică pentru fiecare şi o relaţie între două dintre ele.

Problema 1. Dacă 6 caiete şi 4 pixuri costă 16 lei, iar 3 caiete şi 4 pixuri costă 10 lei, calculaţi suma de bani necesară pentru a calcula 5 caiete şi 3 pixuri.

Soluţie.

6 caiete…………………………4 pixuri……………………………16 lei

3 caiete ………………………...4 pixuri……………………………10 lei.

Comparând constatăm că diferenţa dintre sumele de bani se datorează diferenţei dintre numerele de caiete. Deci 3 caiete costă 6 lei. Cu *metoda reducerii la unitate* obţinem că 1 caiet costă 2 lei şi deci 6 caiete costă 12 lei. Deci cele 4 pixuri costă 16 lei – 12 lei = 4lei, iar un pix costă 1 leu. În concluzie 5 caiete şi 3 pixuri costă $5 \cdot 2$ lei + $3 \cdot 1$ leu = 13 lei.

Problema 2. Aflaţi cât costă un caiet şi cât costă un pix, ştiind că 3 caiete şi 7 pixuri costă 41 lei, iar 5 caiete şi 2 pixuri costă 20 lei.

Soluţie.

3 caiete ………………………..7 pixuri……………………41 lei / $\cdot 5$

5 caiete ………………………..2 pixuri……………………20 lei/ $\cdot 3$.

Obţinem

15 caiete………………………..35 pixuri……………………205 lei

15 caiete…………………………6 pixuri……………………60 lei

de unde

29 pixuri…………………...145 lei

Am înmulţit cu 5, respectiv 3, după care *analizând şi comparând* am obţinut că 29 pixuri costă 145 lei. Cu *metoda reducerii la unitate* obţinem că 1 pix costă 5 lei , 2 pixuri costă 10 lei , 5 caiete costă 10 lei şi un caiet costă 2 lei.

După *dirijarea învăţării* realizată de profesor prin rezolvarea celor 2 probleme se constată că aceste sunt de *tipul 1.* Metoda constă în a compara primul şir de valori numerice , cu cel de al doilea şir , după ce eventual am prelucrat aceste şiruri,după care se trece la *eliminarea unei necunoscute* prin scădere.

Problema 3. 20 de găini şi 7 raţe au consumat 34 kg de grăunţe. Ştiind că o raţă consumă cât două găini , să se afle câte kg de grăunţe a consumat o găină şi câte o raţă.

Soluţie. Problema este de *tipul 2* deoarece avem un singur şir de valori şi o relaţie pentru primele două valori:

20 găini………………………7 raţe ……………………………….34 kg grăunţe

1 raţă $\rightarrow$ 2 găini .

Ideea rezolvării constă în *eliminarea uneia dintre mărimi* („ raţele”) *prin înlocuirea ei* (cu „ găini”).

Obţinem şirul

20 găini ……………………14 găini ……………………………….34 kg grăunţe

adică 20 +14=34 găini consumă 34 kg de grăunţe. Deci o găină consumă 1 kg de grăunţe iar o raţă 2 kg de grăunţe.

Pentru *intensificarea retenţiei* se cere elevilor rezolvarea , *individual sau pe grupe* a două probleme asemănătoare şi compunerea (cu rezolvare) a unei probleme de *tipul 1.*

Tema pentru acasă

1) Aflaţi cât costă 1 kg de mere şi cât costă 1 kg de portocale dacă 5 kg de mere şi 8 kg de portocale costă 47 de lei, iar 10 kg de mere şi 6 kg de portocale costă 54 lei.

Indicaţie. Şirul 5kg mere……….8 kg portocale ………..47 lei se înmulţeşte cu 2 pentru a putea realiza *compararea.*

2)La o fermă, la 75 de vaci şi 50 de cai se dau zilnic 1500 kg de fân , iar la 50 de cai şi 55 de vaci se dau 1300 kg de fân. Ce cantitate de fân mănâncă pe zi un cal ?Dar o vacă ?
(se presupune că raţiile de fân pentru fiecare animal sunt egale).

Răspuns: 15 kg şi 10 kg

3)S-au cumpărat 30 kg de cartofi şi 40 kg de varză şi s-a plătit în total 100 lei. 1 kg de cartofi este de două ori mai scump decât 1 kg de varză. Cât costă 1 kg din fiecare dintre legume ?

Răspuns: 2 lei şi 1 leu

4)Compuneţi o problemă de tipul celei precedente şi rezolvaţi-o cu *metoda comparaţiei (eliminând o necunoscută prin înlocuirea ei)* . Puteţi folosi schema :

12 caiete……………..15 creioane ……………………..78 lei
1 caiet $\rightarrow$ 2 creioane

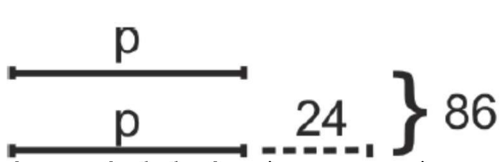
3. METODA FIGURATIVĂ

Această metodă constă în reprezentarea prin desen a mărimilor necunoscute şi fixarea în desen a relaţiilor dintre ele şi mărimile cunoscute . Se realizează o schemă a problemei printr-o figură care păstrează în atenţie numai relaţiile matematice şi nu toate aspectele concrete.

Ilustrăm folosirea *metodei figurative(grafice)* prin rezolvarea unor probleme.

Problema 1.(Tipul 1:*Aflarea a 2 numere când se dau suma şi diferenţa lor)* O frânghie lungă de 86 m a fost tăiată în două părţi, asfel încât una dintre ele să aibă cu 24 m mai mult decât cealaltă. Câţi metri are fiecare parte ?

*Soluţie.*Figurăm partea mai scurtă notată *p* printr-un segment:



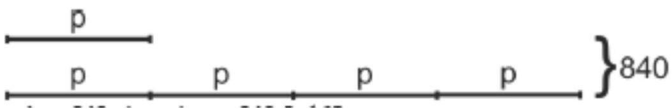
Obţinem 2 p = 86-24 (2 p însemnând de 2 ori partea mai scurtă), adică 2p = 62, de unde p=31.Deci partea mai scurtă di frânghie are 31 m , iar partea mai lungă are 31+24 = 55 m.

Verificare 31 m + 55 m = 86 m.

Problema 2.(Tipul 2:*Aflarea a 2 numere când se dau suma şi raportul lor*) Doi muncitori au primit pentru o lucrare 840 lei. Unul dintre ei a lucrat de 4 ori mai mult decât a lucrat celălalt.

Este corect dacă considerăm că unuia i se cuvine 480 lei şi celuilalt 360 lei ? Justificaţi răspunsul!.Dacă răspunsul este negativ, stabiliţi cât se cuvine fiecăruia dintre ei ?

Soluţie. Cu toate că 480 lei +360 lei = 840 lei, răspunsul sugerat de enunţ nu este corect deoarece 480 nu este de 4 ori mai mare decât 360. Pentru a găsi răspunsul corect folosim *metoda figurativă*, figurând printr-un segment suma pe care a primit-o muncitorul care a lucrat mai puţin:



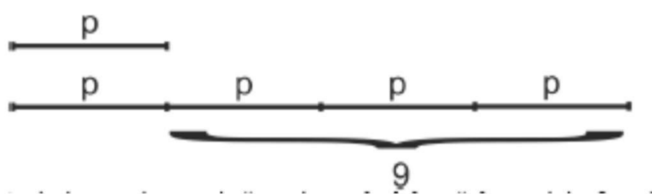
Deci 1p + 4p = 840, de unde p = 840:5=168.
În concluzie muncitorii trebuie să primească 168 lei şi 840 – 168 = 672 lei.

Verificare: $168 \cdot 4$ =672 lei.

Comentariu. Este util ca, la finalul rezolvării; să verificăm dacă soluţia găsită este corectă prin efectuarea unei probe: rezultatele obţinute trebuie să verifice condiţiile din problemă.

Problema 3.(**Tipul 3**:*Aflarea a 2 numere când se dau diferenţa şi raportul lor*) O gospodină a făcut dulceaţă de prune şi de gutui. Cantitatea de dulceaţă de prune este cu 9 kg mai mare decât cea de gutui, iar cantitatea de dulceaţă de gutui este de 4 ori mai mică decât cealaltă. Câte kg de dulceaţă a făcut din fiecare fel.

Soluţie. Intuim următoarea schemă de rezolvare



unde segmentul mic (o parte) reprezintă cantitatea de dulceaţă de gutui, iar 3p = 9 este diferenţa dintre cantitatea de dulceaţă de prune şi cea de gutui. Obţinem că p = 3 şi deci cantitatea de dulceaţă de gutui este de 3 kg , iar cea de dulceaţă de prune este de 12 kg.

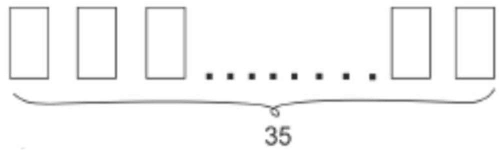
Ne vom opri la cele *3 tipuri de probleme exemplificate*, acestea fiind mai aproape de *puterea de înţelegere a unui elev de clasa a V-a* . Totuşi este bine să le atragem atenţia elevilor că *metoda figurativă* este cel mai des folosită în rezolvarea de probleme prin metode aritmetice, ea putându-se aplica la orice categorie de probleme la care este posibilă reprezentarea mărimilor din problemă şi a relaţiilor dintre acestea prin diferite elemente grafice: desene sau scheme. Putem folosi , pe lângă segmente de dreaptă, dreptunghiuri, triunghiuri, cerculeţe, litere etc.

Pentru *asigurarea retenţiei* vom împărţi clasa în *3 grupe* şi fiecare grupă va primi câte o problemă din cele 3 tipuri (tipuri diferite la grupe diferite). Se vor da indicaţii sau răspunsuri şi după timpul acordat rezolvării, liderul fiecărei grupe va rezolva problema la tablă, iar profesorul va face comentarii utile.

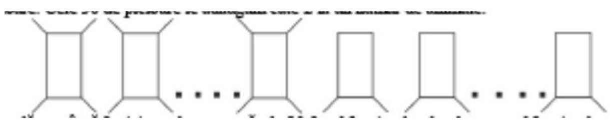
Pentru ca elevii să nu rămână cu impresia că metoda figurativă se aplică numai la cele 3 tipuri de probleme şi numai utilizând segmente se va rezolva cu ajutorul lor, folosind descoperirea, următoarea:

Problema 4. Într-o curte sunt găini şi iepuri, în total 35 de capete şi 100 de picioare. Câte găini şi câţi iepuri sunt în curte ?

Soluţie. Figurăm cele 35 de animale prin nişte dreptunghiuri;



Punem la fiecare animal câte 2 picioare;



Observăm că s-au „consumat” în acest fel $35 \cdot 2$ = 70 de picioare, rămânând 100- 70 = 30 picioare. Cele 30 de picioare le adăugăm câte 2 la un număr de animale:

Am adăugat încă 2 picioare la un număr de 30:2 = 15 animale. Aşadar, sunt 15 animale cu câte 4 picioare şi restul de 20 cu câte 2 picioare. Deci sunt 15 iepuri şi 20 de găini.

Verificare: 15+20=35 şi $15 \cdot 4+20 \cdot 2$=100 picioare.

Tema pentru acasă.

1). O panglică de 50 m a fost tăiată în două părţi, astfel încât una din ele să fie cu 16 m mai mare decât cealaltă.Câţi metri are fiecare parte?

2). Folosind schema :

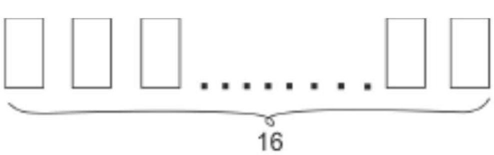
compuneţi o problemă de aflare a două numere când se dau suma şi raportul lor şi rezolvaţi-o (folosind schema) prin *metoda figurativă.*

3). Un metru de stofă costă cu 36 lei mai mult decât un metru de tergal şi este de 3 ori mai scump.Cât costă un metru de stofă şi cât costă un metru de tergal.

*Indicaţie.*Folosiţi schema

4). Într-o curte sunt miei şi raţe, în total 50 de picioare şi 16 capete. Câte raţe şi câţi miei sunt în curte.

Indicaţie Marcăm prin dreptunghiuri cele 16 animale după care le distribuim picioarele.



4. METODA MERSULUI INVERS

Această metodă se aplică dacă o problemă cere aflarea unui număr asupra căruia se realizează succesiv mai multe operaţii.

Tipul 1. Dacă problema este mai simplă se notează cu x numărul necunoscut şi se scriu operaţiile din enunţ. Apoi se foloseşte *mersul invers*, făcând succesiv proba operaţiilor scrise din citirea enunţului.

Tipul 2. Dacă problema este mai complicată, pentru a realiza mersul invers ne folosim de *metoda figurativă* .

Are loc *dirijarea învăţării* prin rezolvarea la tablă a următoarelor probleme:

Problema1(Tipul 1). Am ales un număr ; l-am înmulţit cu 5, la rezultat am adăugat 41, suma obţinută am împărţit-o la 7 şi din cât am scăzut 61, obţinând 312. Ce număr am ales ?

Soluţie. Notând cu x numărul căutat, enunţul se poate scrie prescurtat astfel:

$$(x\cdot 5+41):7-61=312.$$

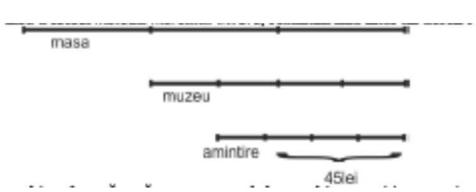
Pentru aflarea lui x avem succesiv:

$$(x\cdot 5+41):7=312+61;(x\cdot 5+41):7=373;$$
$$x\cdot 5+41=373\cdot 7;x\cdot 5+41=2611;x\cdot 5=2611-41;$$
$$x\cdot 5=2570;x=2570:5;x=514.$$

Deci numărul ales a fost 514.

Problema 2 (Tipul 2). Un elev merge într-o excursie. Are la el, pentru cheltuieli, o sumă de bani. Pentru masa de prânz foloseşte o treime din sumă, pentru biletul de intrare la muzeu chetuieşte un sfert din banii rămaşi, iar ca să-şi cumpere o amintire încă un sfert din noul rest. Se întoarce acasă cu 45 de lei .Cu ce sumă de bani a plecat elevul în excursie ?

*Soluţie.*Pentru a folosi *metoda mersului invers*, realizăm mai întâi un desen ajutător.



Urmărind schiţa observăm că tot segmentul de pe ultima poziţie reprezintă 45:3 $\cdot$ 4 = 60 lei. Atunci segmentul al doilea reprezintă 60:3 $\cdot$ 4 = 80 lei. În final, primul segment reprezintă 80:2 $\cdot$ 3 = 120 lei şi deci elevul a plecat în excursie cu 120 lei.

Verificare: $120:3=40$ lei pentru masă, rămân 80 lei; $80:4=20$ lei pentru muzeu; rămân $80-20=60$ lei; $60:4=15$ lei pentru amintire; rămân 60-15=45 lei.

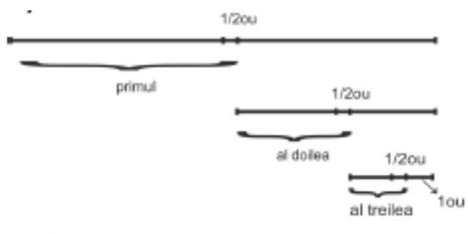
Pentru *intensificarea retenţiei* se poate cere elevilor să rezolve independent problemele următoare:

Problema 3. Am ales un număr, din el am scăzut 2, rezultatul l-am împărţit la 5, la câtul obţinut am adunat 4 şi apoi suma am împărţit-o la 3, obţinând 15.Fac afirmaţia că numărul ales este număr par. Este adevărată afirmaţia ?Justificaţi răspunsul?

Apoi în *munca pe grupe* se poate propune elevilor să rezolve următoarea *problemă distractivă:*

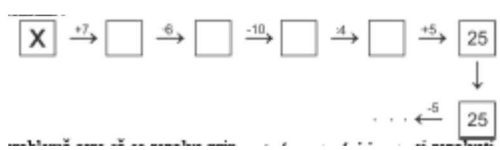
Problema 4. O gospodină merge la piaţă să vândă ouă. Primul cumpărător cumpără jumătate din numărul de ouă şi încă o jumătate de ou. Al doilea cumpără jumătate din numărul de ouă rămase şi încă o jumătate de ou. La final mai vine un cumpărător care cumpără la fel, jumătate din numărul de ouă rămase şi încă o jumătate de ou. Gospodinei îi mai rămâne un ou nevândut. Cu câte ouă a mers gospodina la piaţă.

Indicaţie. Folosiţi schema:



Tema pentru acasă:

1)Folosind schema :



compuneţi o problemă care să se rezolve prin *metoda mersului invers* şi rezolvaţi-o completând schema în sensul indicat de ultima săgeată.

Răspuns: 8

2) Radu , Victor şi Mihai sunt fraţi . Radu pleacă primul la şcoală şi ia jumătate din numărul merelor lăsate de mama lor şi încă jumătate de măr. Victor pleacă al doilea la şcoală şi ia jumătate din numărul de mere rămase şi încă o jumătate de măr. Mihai pleacă ultimul la şcoală şi ia ultimul măr care a rămas după plecarea lui Victor. Aflaţi câte mere a lăsat mama celor trei fraţi.

Indicaţie. Folosiţi schema

3) Maria se joacă cu un joc electronic. În prima etapă a câştigat jumătate din punctajul final , în etapa a doua o cincime din rest, iar în ultima etapă a câştigat 200 puncte. Câte puncte a câştigat Maria.

<u>*Răspuns*</u>: 500 puncte

5. METODA FALSEI IPOTEZE

În rezolvarea problemelor prin această metodă (denumită şi *metoda ipotezelor*) se utilizează o ipoteză (sau mai multe) asupra unei mărimi (sau a mai multor mărimi) şi apoi se examinează diferenţele apărute între rezultatul căutat şi cel presupus.

Reamintim elevilor că au rezolvat următoarea problemă prin *metoda figurativă*:

Problema 1. Într-o curte sunt găini şi iepuri, în total 35 capete şi 100 picioare. Câte găini şi câţi iepuri sunt în curte.

<u>*Soluţie.*</u>(*folosind metoda falsei ipoteze*)

Ipoteza: Presupunem că în curte sunt numai găini (35 de găini).

Verificarea ipotezei: $35 \cdot 2 = 70$ picioare.

Corectarea ipotezei: 100- 70 = 30 picioare în plus; deci 30:2 = 15 sunt iepuri, iar 35-15=20 sunt găini.

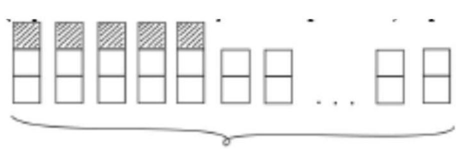
Verificare: 20+ 15 = 35 capete ; $20 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 100$ picioare.

După prezentarea soluţiei, cerem elevilor *să compare cele două soluţii* (cea folosind *metoda figurativă* şi cea folosind *metoda falsei ipoteze*, pentru problema1.)

Apoi le propunem elevilor să rezolve *independent* , folosind *metoda falsei ipoteze* următoarea :

Problema 2. Într-un bloc sunt 20 apartamente cu două şi trei camere. În total sunt 45 de camere. Câte apartamente au două camere şi câte trei camere ?

Comentariu (după ce s-a făcut rezolvarea şi discutarea problemei 2). Se poate folosi schema



şi în acest mod rezolvarea se poate face şi prin *metoda figurativă.*

Nu vom rezolva probleme în care sunt necesare mai multe ipoteze deoarece acestea *depăşesc puterea de înţelegere a unui elev de clasa a V-a.*

Ne vom mărgini să considerăm încă un tip de problemă:

Problema 3. Suma a nouă numere naturale, diferite de zero, este 44. Demonstraţi că cel puţin două dintre numere sunt egale.

<u>*Soluţie.*</u> Presupunem că toate cele nouă numere sunt diferite şi că sunt cele mai mici numere naturale consecutive, diferite de zero(1,2,3,4,5,6,7,8,9).Suma lor este 1+2+3+4+5+6+7+8+9 =

45. Dar în problemă se spune că suma celor nouă numere este 44. Ne punem întrebarea ?„ De unde apare diferenţa de 1 dintre cele două sume ? " Înseamnă că unul dintre numerele 2,3,4,5,6,7,8,9 trebuie să fie mai mic cu 1. În concluzie, pentru a obţine suma 44, este necesar ca două dintre numere să fie egale.

Comentariu. Profesorul le explică elevilor că în matematică există şi aşa numita „ *metodă a reducerii la absurd* " care se bazează pe următorul raţionament logic: „când este imposibil ca o propoziţie să fie falsă atunci ea este adevărată". În problema 3 propoziţia „ Cel puţin două dintre numere sunt egale " presupusă falsă conduce la imposibilitatea 45 = 44 . Deci este imposibil ca ea să fie falsă şi deci este adevărată. În acest mod putem spune că *am rezolvat problema prin metoda reducerii la absurd*.

Pentru *intensificarea retenţiei* se vor rezolva în *munca pe grupe* probleme asemănătoare celor trei probleme anterioare.

Tema pentru acasă .

1)Suma de 950 lei s-a plătit cu ajutorul a 14 bacnote de 100 lei şi 50 lei.Câte bacnote au fost din fiecare fel?

Răspuns: 9 de 50 lei şi 5 de 100 lei

2)Suma a patru numere nturale este 201.Arătaţi că cel puţin unul dintre ele este mai mare decât 50.

Indicaţie. Fie a,b,c,d cele patru numere. Presupunem $a \le 50, b \le 50, c \le 50, d \le 50$.

3) La un supermarket s-au vândut într-o zi 150 kg de mere de două calităţi încasându-se 640 lei. Ştiind că merele de calitatea I s-au vândut cu 5 lei kg, iar cele de calitatea a II-a cu 3 lei kg , să se calculeze câte kg de mere din fiecare calitate s-au vândut în ziua aceea.

Răspuns: 95 kg calitatea I şi 55 kg calitatea a II-a

6 . TESTE DE EVALUARE

Testul 1

(1,5p) 1) Dacă din dublul unui număr scădem 35, apoi rezultatul îl mărim de 3 ori şi din noul rezultat scădem 18, obţinem 177. Aflaţi numărul.
(1,5p) 2) Opt metri de stofă costă 280 de lei. Cât costă 5 metri de stofă de aceeaşi calitate?
(2 p) 3) Suma a două numere este 98. Aflaţi numerele, dacă prin împărţirea lor se obţine câtul 5 şi restul 8.
(2 p) 4) Într-o curte sunt raţe şi iepuri. Aflaţi câte raţe şi câţi iepuri sunt în curte dacă au în total 22 de capete şi 74 de picioare.
(2 p) 5) Aflaţi preţul unui creion şi preţul unui caiet dacă 3 creioane şi 2 caiete costă 19 lei, iar 5 creioane şi 4 caiete costă 35 lei.
Notă: Se acordă 1 punct din oficiu. Alegeţi metoda aritmetică adevărată, pentru rezolvare.

F. BIBLIOGRAFIE ORIENTATIVA PENTRU TEMATICA DISCIPLINEI DE CONCURS MATEMATICA

- Aron I., Herescu, Gh., Dumitru, A., 1996, Aritmetica pentru invatatori, Bucuresti, Editura Didactica si Pedagogica.
- Magdas, I., 2019, Matematica. Ghid pentru pregatirea initiala si continua a profesorilor pentru invatamantul primar, Cluj-Napoca, Presa Universitara Clujeana.
- Rosu, M., 2019, Elemente de matematica pentru profesorii din invatamantul primar, Editia a 2-a, revizuita, Bucuresti, Editura Aramis.
- Rosu, M., Roman, M., 1999, Matematica pentru perfectionarea invatatorilor, Bucuresti, Editura All.
- Manualele de matematica pentru clasele a IV-a – a VIII-a valabile in anul scolar in care se sustine *concursul.*