Progresii

Progresiile sunt şiruri definite printr-o relație de recurență, adică o relație care permite calcularea fiecărui termen al şirului în funcție de termenii anteriori.

Se numeşte *şir de numere reale* o funcție $f: N^* \to R$.

Pentru fiecare $n \in N^*$ notăm $f(n) = a_n$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc *termenii* şirului.Şirul astfel definit se notează $(a_n)_{n\geq 1}$ sau $(a_n)_{n\in N^*}$.

I. **Progresii aritmetice**

- Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este *progresie aritmetică* dacă există un număr real r astfel încât pentru orice

$$n \geq 1, a_{n+1} = a_n + r$$

  Numărul r se numeşte *rația* progresiei.

  Rezultă că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sunt în progresie aritmetică dacă

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1}$$

- Avem succesiv:

$$a_2 = a_1 + r;$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

şi, prin inducție,

$$\boxed{a_n = a_1 + r(n-1)}.$$

- Caracterizarea progresiei aritmetice este dată de următoarea teoremă:
  Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă şi numai dacă pentru orice

$$n \geq 2, a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

- Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}},$$

  care se mai poate scrie, înlocuind

$$a_n = a_1 + r(n-1),$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + r(n-1))}{2}$$

Observații:

1) Pentru a arăta că un şir este progresie aritmetică fie arătăm că diferența oricăror 2 termeni consecutivi este constantă, fie ca pentru orice
$$n \geq 2, a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

2) Dacă cunoaştem S_n, atunci pentru $n = 1$ rezultă

   $S_1 = a_1$,

   iar pentru $n \geq 2$ rezultă

   $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Aplicații

1) Să se calculeze al zecelea termen al şirului $1, 7, 13, 19, ...$

Avem $7 - 1 = 13 - 7 = 19 - 13 = 6$, deci şirul este o progresie aritmetică cu rația

$r = 6$ şi $a_1 = 1$.

Rezultă

$a_{10} = a_1 + 9r = 55$

2) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_6 = 11$. Să se calculeze a_9.

Din $a_3 = a_1 + 2r$ şi $a_6 = a_1 + 5r$ obținem prin scădere membru cu membru:

$a_6 - a_3 = 3r$, deci

$3r = 11 - 5$ şi $r = 2$.

Rezultă

$a_9 = a_8 + r = a_7 + 2r = a_6 + 3r = 11 + 6 = 17$.

3) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1 = 1$ şi $a_5 = 13$. Să se calculeze a_{2012}.

Cum $a_5 = a_1 + 4r$, rezultă

$4r = 12$ şi $r = 3$.

Avem

$$a_{2012} = a_1 + 2011r = 1 + 2011 \cdot 1 = 6034.$$

4) Să se determine numărul $x \in R$, ştiind că şirul $1, 2x + 1, 9, 13, ...$ este progresie aritmetică.

În progresia aritmetică

$a_1, a_2, a_3, \ a_4, ..., a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = r.$

Rezultă

$2x + 1 - 1 = 13 - 9$, deci

$2x = 4$ şi $x = 2$.

5) Calculați suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice în care $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$.

Avem

$S_{10} = \frac{10(a_1+a_{10})}{2}$.

Cum $a_1 = 2$ şi $a_2 = 4$, rezultă

$r = a_2 - a_1 = 2$ şi

$a_{10} = a_1 + 9r = 2 + 18 = 20.$

Rezultă

$S_{10} = 110.$

6) Să se determine numărul real x, ştiind că numerele $x + 1, 2x - 3$ şi $x - 3$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Dacă a_1, a_2, a_3 sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci

$a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$.

Avem deci $2x - 3 = \frac{x+1+x-3}{2}$, de unde

$4x - 6 = 2x - 2$ şi $2x = 4$, adică $x = 2$.

7) Să se calculeze suma $S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 2013$.

Suma cerută reprezintă suma termenilor unei progresii aritmetice cu
$a_1 = 1, a_n = 2013$ şi $r = 4$.

Trebuie să stabilim numărul termenilor.

Avem $a_n = a_1 + r(n-1)$, de unde

$2013 = 1 + 4(n-1)$ şi

$n - 1 = \frac{2012}{4}$, deci

$n = 504$.

Rezultă
$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{504(1 + 2013)}{2} = 252 \cdot 2014.$$

8) Să se determine numărul natural n din egalitatea $1 + 5 + 9 + \cdots + n = 231$.

Egalitatea dată reprezintă suma unei progresii aritmetice cu $a_1 = 1, r = 4$ şi k termeni, cu $n = a_k = 1 + 4(k-1)$, adică $n = 4k - 3$.

Avem $\frac{k(a_1+a_k)}{2} = 231$.

Rezultă $k(1 + 4k - 3) = 462$, de unde

$k(4k - 2) = 462$ sau

$k(2k - 1) = 231$, adică

$2k^2 - k - 231 = 0$ cu soluțiile

$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1849}}{4}$.

Rezultă $k_{1,2} = \frac{1 \pm 43}{4}$.

Cum $k > 0$, convine $k = 11$ şi deci

$n = 4k - 3 = 41$.

9) Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in N^*$. Arătați că dacă $S_n = 2n^2 - n$, oricare ar fi $n \in N^*$, şirul este o progresie aritmetică.

Avem

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1), n \geq 2$ şi cum

$a_n = S_n - S_{n-1}$, adică

$a_n = 2n^2 - n - 2n^2 + 4n - 2 + n - 1$ deci

$a_n = 4n - 3$ şi $a_{n+1} = 4n + 1$.

Rezultă $a_{n+1} - a_n = 4$ pentru orice $n \geq 2$.

Pentru $n = 1, a_1 = S_1 = 1, a_2 = 5, a_2 - a_1 = 4$,

deci şirul este progresie aritmetică cu $r = 4$.

10) Se consideră mulțimea $M = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. Să se determine numărul tripletelor (a, b, c) cu proprietatea $a, b, c \in M, a < b < c$, şi a, b, c sunt în progresie aritmetică.

Rația unui tiplet $a < b < c$ este evident multiplu de 4, deci poate fi 4, 8 sau 12.

Pentru $r = 4$ obținem $(0, 4, 8);\ (4, 8, 12);\ (8, 12, 16);\ (12, 16, 20);\ (16, 20, 24)$.

Pentru $r = 8$ obținem $(0, 8, 16);\ (4, 12, 20);\ (8, 16, 24)$.

Pentru $r = 12$ obținem $(0,12, 24)$.

Avem în total 9 triplete.

Propunem spre rezolvare:

1) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1, ştiind că rația progresiei este 2.

2) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_1 = 7$ şi $a_7 = 37$. Să se calculeze suma primilor 15 termeni ai progresiei.

3) Să se calculeze suma $S = 1 + 11 + 21 + 31 + \cdots + 111$.

4) Să se determine $x \in R$, ştiind că numerele $x - 1, x + 2, 2x - 1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu rația 3. Ştiind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se afle a_1.

6) Fie şirul $(a_n)_{n\geq1}$ şi $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ştiind că pentru orice $n \in N^*$ are loc egalitatea $S_n = n^2 + n$, să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică.