Derivata unei funcții. Interpretare geometrică

Aplicații

1) Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = e^x + x^2$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Pentru $x_0 = 1$ obținem

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1).$$

Avem $f'(x) = e^x + 2x$ şi deci $f'(1) = e + 2$.
Rezultă

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e + 2.$$

2) Se consideră funcția $f: R - \{1\} \to R,\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1).$$

Calculăm $f'(x)$ folosind formula de derivare a câtului.
Avem

$$f'(x) = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

şi

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

3) Se consideră $f: R^* \to R, f(x)=x^3+\frac{3}{x}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1).$$

Avem

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}$$

şi

$$f'(1)=0,$$

deci

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0.$$

4) Se consideră funcția $f: (0,\infty) \to R, f(x)=(x-3)\ln x$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

- Folosind regula de derivare a produsului, avem

$$f'(x)=\ln x+(x-3)\cdot\frac{1}{x}.$$

Din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

şi, cum

$$\ln 1=0, f'(1)=-2,$$

rezultă că limita cerută este egală cu -2.

5) Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\sqrt{x}-\ln x$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}.$$

- Avem

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{x}$$

și din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4).$$

Cum $f'(4)=0,$ rezultă

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0.$$

6) Se consideră $f:R\to R, f(x)=x^{2012}-2012(x-1)-1$. Să se calculeze $f(0)+f'(0)$ și să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=1$.

- Avem

$$f'(x)=2012\cdot x^{2011}-2012$$

și deci

$$f(0)+f'(0)=2012-1-2012=-1.$$

Ecuația tangentei este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

și, cum

$$x_0=1, f(1)=0, f'(1)=0,$$

rezultă $y=0$.

7) Se consideră $f:R\to R, f(x)=e^x-1$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă -1.

- Avem

$$f'(x)=e^x,\qquad f(-1)=\frac{1}{e}-1,\qquad f'(-1)=\frac{1}{e}$$

și, cum ecuația tangentei este

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1),$$

rezultă

$$y-\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{1}{e}\,(x-1),$$

adică

$$y=\frac{1}{e}\cdot x-1.$$

8) Se consideră funcția $f\colon R\to R, f(x)=e^x-ex-1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției în $O(0,0)$ și dreapta de ecuație $x=1$.

- Avem

  $$f'(x)=e^x-e$$

  şi

  $$f'(0)=1-e.$$

  Ecuația tangentei în O este

  $$y=(1-e)x.$$

  Coordonatele punctului de intersecție al tangentei cu dreapta dată se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile lor:

  $$\begin{cases} y=(1-e)x \\ x=1 \end{cases}$$

  şi deci punctul căutat are coordonatele $x=1, y=1-e$.

9) Se consideră funcția $f\colon[1,\infty), f(x)=e^x+\frac{x-1}{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1,e)$.

- Avem

  $$f'(x)=e^x+\frac{x-x+1}{x^2}=e^x+\frac{1}{x^2}$$

  şi

  $$f'(1)=e+1.$$

  Ecuația tangentei este

  $$y-f(1)=f'(1)(x-1),$$

  adică

  $$y-e=(e+1)(x-1)$$

sau

$$y = (e+1)x - 1.$$

10) Se consideră $f:(0,\infty) \to R, f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

- Avem

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

adică

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

şi

$$f'(1) = 0.$$

Cum $f(1) = -1$, rezultă că ecuația tangentei este

$y + 1 = 0$, adică $y = -1$ (o paralelă la axa Ox).

11) Se consideră $f:(0,\infty) \to R, f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = e$.

- Derivăm f ca un cât şi avem

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$

adică

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Cum $f'(e) = 0, f(e) = \frac{1}{e}$ şi ecuația tangentei este

$$y - f(e) = f'(e)(x - e).$$

Rezultă $y - \frac{1}{e} = 0$ sau $y = \frac{1}{e}$.

12) Se consideră $f:(1,\infty) \to R,\ f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 3$.

- Avem

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2},$$

adică

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

şi

$$f'(3) = \frac{e^3}{4}.$$

Cum

$$f(3) = \frac{e^3}{2}$$

şi ecuația tangentei este

$$y - f(3) = f'(3)(x-3),$$

obținem

$$y - \frac{e^3}{2} = \frac{e^3}{4}(x-3)$$

sau

$$y = \frac{e^3}{4}x - \frac{e^3}{4}.$$