

## Progresii

### I. Progresii aritmetice

#### Aplicații

1) Să se calculeze al zecelea termen al șirului 1, 7, 13, 19, ....

Avem  $7 - 1 = 13 - 7 = 19 - 13 = 6$ , deci șirul este o progresie aritmetică cu rația

$$r = 6 \text{ și } a_1 = 1.$$

Rezultă

$$a_{10} = a_1 + 9r = 55$$

2) Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_3 = 5$  și  $a_6 = 11$ . Să se calculeze  $a_9$ .

Din  $a_3 = a_1 + 2r$  și  $a_6 = a_1 + 5r$  obținem prin scădere membru cu membru:

$$a_6 - a_3 = 3r, \text{ deci}$$

$$3r = 11 - 5 \text{ și } r = 2.$$

Rezultă

$$a_9 = a_8 + r = a_7 + 2r = a_6 + 3r = 11 + 6 = 17.$$

3) Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  în care  $a_1 = 1$  și  $a_5 = 13$ . Să se calculeze  $a_{2012}$ .

Cum  $a_5 = a_1 + 4r$ , rezultă

$$4r = 12 \text{ și } r = 3.$$

Avem

$$a_{2012} = a_1 + 2011r = 1 + 2011 \cdot 3 = 6034.$$

4) Să se determine numărul  $x \in R$ , știind că șirul 1,  $2x + 1$ , 9, 13, ... este progresie aritmetică.

În progresia aritmetică

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = r.$$

Rezultă

$$2x + 1 - 1 = 13 - 9, \text{ deci}$$

$$2x = 4 \text{ și } x = 2.$$

5) Calculați suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice în care  $a_1 = 2$  și  $a_2 = 4$ .

Avem

$$S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}.$$

Cum  $a_1 = 2$  și  $a_2 = 4$ , rezultă

$$r = a_2 - a_1 = 2 \text{ și}$$

$$a_{10} = a_1 + 9r = 2 + 18 = 20.$$

Rezultă

$$S_{10} = 110.$$

6) Să se determine numărul real  $x$ , știind că numerele  $x + 1$ ,  $2x - 3$  și  $x - 3$  sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Dacă  $a_1, a_2, a_3$  sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

Avem deci  $2x - 3 = \frac{x+1+x-3}{2}$ , de unde

$$4x - 6 = 2x - 2 \text{ și } 2x = 4, \text{ adică } x = 2.$$

7) Să se calculeze suma  $S = 1 + 5 + 9 + \dots + 2013$ .

Suma cerută reprezintă suma termenilor unei progresii aritmetice cu

$$a_1 = 1, a_n = 2013 \text{ și } r = 4.$$

Trebuie să stabilim numărul termenilor.

Avem  $a_n = a_1 + r(n - 1)$ , de unde

$$2013 = 1 + 4(n - 1) \text{ și}$$

$$n - 1 = \frac{2012}{4}, \text{ deci}$$

$$n = 504.$$

Rezultă

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{504(1 + 2013)}{2} = 252 \cdot 2014.$$

8) Să se determine numărul natural  $n$  din egalitatea  $1 + 5 + 9 + \dots + n = 231$ .

Egalitatea dată reprezintă suma unei progresii aritmetice cu  $a_1 = 1, r = 4$  și  $k$  termeni, cu  $n = a_k = 1 + 4(k - 1)$ , adică  $n = 4k - 3$ .

$$\text{Avem } \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = 231.$$

Rezultă  $k(1 + 4k - 3) = 462$ , de unde

$$k(4k - 2) = 462 \text{ sau}$$

$$k(2k - 1) = 231, \text{ adică}$$

$2k^2 - k - 231 = 0$  cu soluțiile

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1849}}{4}.$$

$$\text{Rezultă } k_{1,2} = \frac{1 \pm 43}{4}.$$

Cum  $k > 0$ , convine  $k = 11$  și deci

$$n = 4k - 3 = 41.$$

9) Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \in \mathbb{N}^*$ . Arătați că dacă  $S_n = 2n^2 - n$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , șirul este o progresie aritmetică.

Avem

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1), n \geq 2 \text{ și cum}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ adică}$$

$$a_n = 2n^2 - n - 2n^2 + 4n - 2 + n - 1 \text{ deci}$$

$$a_n = 4n - 3 \text{ și } a_{n+1} = 4n + 1.$$

Rezultă  $a_{n+1} - a_n = 4$  pentru orice  $n \geq 2$ .

$$\text{Pentru } n = 1, a_1 = S_1 = 1, a_2 = 5, a_2 - a_1 = 4,$$

deci șirul este progresie aritmetică cu  $r = 4$ .

10) Se consideră mulțimea  $M = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$ . Să se determine numărul tripletelor  $(a, b, c)$  cu proprietatea  $a, b, c \in M, a < b < c$ , și  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică.

Rația unui triplet  $a < b < c$  este evident multiplu de 4, deci poate fi 4, 8 sau 12.

Pentru  $r = 4$  obținem  $(0, 4, 8)$ ;  $(4, 8, 12)$ ;  $(8, 12, 16)$ ;  $(12, 16, 20)$ ;  $(16, 20, 24)$ .

Pentru  $r = 8$  obținem  $(0, 8, 16)$ ;  $(4, 12, 20)$ ;  $(8, 16, 24)$ .

Pentru  $r = 12$  obținem  $(0, 12, 24)$ .

Avem în total 9 triplete.