PERMUTĂRI. ARANJAMENTE. COMBINĂRI. PROBABILITĂŢI.

ION CICU

Abstract. Materialul îşi propune o abordare strict la nivelul cerinţelor necesare rezolvării problemelor care apar în subiectul I al examenului de bacalaureat M2.

Pe parcursul materialului, comentariile autorului vor fi scrise folosind culoarea albastru, în timp ce aspectele teoretice esenţiale vor fi prezentate folosind culoarea roşu.

În general, problemele care apar în Subiectul I al variantelor de bacalaureat se reduc pur şi simplu la cunoaşterea formulelor de calcul pentru permutări, aranjamente şi combinări, dar şi calculelor cu factoriale. Din acest motiv vom începe direct cu formulele şi abia mai târziu vom aborda şi definiţiile pentru permutări, aranjamente, combinări.

Prezentăm mai jos câteva exemple luate din variantele propuse de către Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009.

1. Să se determine numărul natural n, $n \geq 5$, ştiind că $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.
2. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.
3. Să se efectueze $A_6^2 - 2C_6^4$.
4. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.
5. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Pentru a rezolva prima problemă prezentată mai sus, să purcedem la înţelegerea noţiunii de factorial.

Definiţie. Prin "n factorial" (notat $n!$) înţelegem produsul tuturor numerelor naturale de la 1 până la n.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}$$

Observaţie. Deşi majoritatea cărţilor de specialitate prezintă definiţia factorialului ca mai sus, eu prefer să o spun astfel:

Definiţie. Prin "n factorial" (notat $n!$) înţelegem produsul tuturor numerelor naturale de la n până la 1.

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

Prefer această scriere deoarece în multe situaţii nu este necesar să scriem toţi factorii; este posibil să fie necesar să scriem numai primii trei sau patru factori.

Exemplu. În loc de

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e posibil să scriem

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$$

Atenţie. Prin convenţie $\boxed{0! = 1}$

Cunoscând numai definiţia factorialului, putem rezolva primul dintre exerciţiile de mai sus.

Ex.1. Să se determine numărul natural n, $n \geq 5$, ştiind că $\dfrac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.

Soluţie. Fiind vorba de o fracţie, ne punem problema unei eventuale simplificări. Pentru aceasta putem scrie ca produse de factori ambele factoriale, sau dezvoltăm factorialul numărului mai mare $(n-3)$ până ajungem la factorialul numărului mai mic $(n-5)$.

Ecuaţia se poate scrie

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 6,$$

iar în urma simplificării prin $(n-5)!$ obţinem

$$(n-3)(n-4) = 6.$$

Desfacem parantezele, trecem pe 6 în membrul stâng, reducem termenii asemenea şi obţinem

$$n^2 - 7n + 6 = 0$$

cu soluţiile $n_1 = 1$ şi $n_2 = 6$ (vezi rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea). Având în vedere condiţiile impuse în enunţul problemei, deducem că soluţia problemei este $n = 6$ (de altfel valoarea 1 nu convine şi pentru că factorialele nu ar fi atunci bine definite).

Pentru a rezolva celelalte exerciţii este necesar să cunoaştem semnificaţia notaţiilor P_n, A_n^k, C_n^k.

Definiţie D1. P_n reprezintă numărul permutărilor unei mulţimi cu n elemente, şi se calculează cu formula:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Definiţie D2. A_n^k reprezintă numărul aranjamentelor unei mulţimi cu n elemente din care alegem k elemente $(k \leq n)$. Numărul aranjamentelor se calculează cu formula:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Definiţie D3. C_n^k reprezintă numărul combinărilor unei mulţimi cu n elemente din care alegem k elemente $(k \leq n)$. Numărul combinărilor se calculează cu formula:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Observaţie. În toate cazurile de mai sus se vorbeşte despre n ca fiind numărul de elemente al unei mulţimi. Din acest motiv avem întotdeauna n număr natural.

Cunoaşterea acestor formule este suficientă pentru a rezolva toate problemele propuse mai sus. Vom trece acum la rezolvarea lor.

Ex.2. Să se calculeze $C_3^2 + 3!$.

Soluţie. În conformitate cu D3 avem

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1} = 3.$$

Am simplificat prin 2!.

Pe de altă parte

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Cu acestea avem

$$C_3^2 + 3! = 3 + 6 = 9.$$

Ex.3. Să se efectueze $A_6^2 - 2C_6^4$.

Soluţie. Din D2 avem
$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 30,$$
iar din D3 avem
$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2\cdot 1} = 15.$$
Cu acestea avem
$$A_6^2 - 2C_6^4 = 30 - 2\cdot 15 = 0.$$

Ex.4. Să se calculeze $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4$.

Soluţie. Din D3 avem
$$C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1.$$
(Să nu uităm! $0! = 1$)
$$C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4\cdot 3!}{3!} = 4.$$
$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2\cdot 1} = 6.$$
$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{4\cdot 3!}{3!} = 4.$$
Dacă se cunoaşte formula combinărilor complementare ($C_n^k = C_n^{n-k}$), atunci $C_4^3 = C_4^1 = 4$.
$$C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4!}{4!\cdot 0!} = \frac{4!}{4!} = 1.$$
Folosind aceeaşi formulă a a combinărilor complementare ($C_n^k = C_n^{n-k}$) avem $C_4^4 = C_4^0 = 1$.
Cu acestea avem
$$C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$$
Există şi o soluţie mult mai elegantă, dar aceasta presupune cunoaşterea formulei binomului lui Newton
$$0 = (1-1)^4 = C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4.$$

Ex.5. Să se rezolve ecuaţia $C_n^2 = 28,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Soluţie. Din D3 avem
$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{2\cdot 1\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$
Cu aceasta ecuaţia devine
$$\frac{n(n-1)}{2} = 28,$$
sau
$$n^2 - n - 56 = 0,$$
cu soluţiile $n_1 = -7$ şi $n_2 = 8$. Având în vedere condiţiile impuse în enunţul problemei avem ca soluţie a ecuaţiei iniţiale valoarea $n = 8$ (de altfel valoarea -7 nu convine şi pentru că nu ar fi atunci bine definite combinările).

De regulă condiţiile de existenţă pentru permutări, aranjamente, combinări, trebuie impuse de către noi, în conformitate cu D1, D2, respectiv D3. În cazul ecuaţiei de mai sus trebuie să avem $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$, adică exact ceea ce s-a dat în enunţ.

Numărul permutărilor, al aranjamentelor sau al combinărilor, poate să apară şi în alte tipuri de probleme, nu numai în cele de simplă înlocuire cu formula, cum am văzut mai sus. În fond, numărul permutărilor, al aranjamentelor sau al combinărilor este gândit pentru a număra o situaţie concretă.

Cu toţii ştiţi de clasamentul de la fotbal. V-aţi pus vreodată întrebarea câte clasamente se pot forma, cu aceleaşi echipe, dar pe poziţii diferite?

O altă situaţie ar fi dacă dorim să acordăm trei premii (I, II, III) la trei elevi dintr-o clasă. Cu totul altceva este dacă dintr-o clasă de elevi dorim să formăm o echipă de trei elevi. În câte feluri am putea, teoretic, forma o astfel de echipă?

Pentru a da răspuns la aceste întrebări trebuie să lămurim ce înţelegem prin permutare, aranjament sau combinare.

Definiţie. Fie A o mulţime finită. Vom considera că mulţimea A este ordonată dacă elementele ei au locuri bine stabilite în scriere.

Ca mulţimi pur şi simplu, $\{a, b, c\}$ şi $\{b, a, c\}$ sunt egale. Ca mulţimi ordonate, ele sunt diferite, pentru că în prima mulţime a ocupă primul loc, iar în cea de a doua ocupă locul doi. La fel, b, în prima mulţime ocupă locul doi, iar în cea de a doua mulţime ocupă primul loc.

Definiţie. Dacă A este o mulţime finită, atunci orice mulţime ordonată formată cu toate elementele mulţimii A se numeşte permutare.

Ca mai sus, numărul permutărilor unei mulţimi cu n elemente este $P_n = n!$.

Definiţie. Dacă A este o mulţime finită cu n elemente, atunci orice submulţime ordonată formată din k elemente ($k \leq n$) luate din mulţimea A se numeşte aranjament.

Ca mai sus, numărul aranjamentelor unei mulţimi cu n elemente luate câte k este $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Definiţie. Dacă A este o mulţime finită cu n elemente, atunci orice submulţime formată din k elemente ($k \leq n$) luate din mulţimea A se numeşte combinare.

Ca mai sus, numărul combinărilor unei mulţimi cu n elemente luate câte k este $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Atenţie! Între aranjamente şi combinări, diferenţa poate părea foarte mică. Pentru aranjamente, ordinea elementelor în submulţime este importantă, în vreme ce pentru combinări nu contează ordinea elementelor din submulţime.

Putem acum răspunde la întrebarea "câte clasamente se pot forma, cu aceleaşi echipe, dar pe poziţii diferite?" Clasamentul este o mulţime cu 18 elemente (cele 18 echipe) în care ordinea echipelor este foarte importantă (mai ales dacă Steaua e pe primul loc ☺). Vorbim astfel despre permutări. Aşadar, numărul de posibile clasamente este $P_{18} = 18!$ (calculaţi voi cât înseamnă asta – este un număr de 16 cifre ...).

Răspundem acum şi la celelalte două întrebări.

Dorim să acordăm trei premii (I, II, III) la trei elevi dintr-o clasă cu 25 de elevi. În câte moduri putem face acest lucru? Avem o mulţime cu 25 de elemente (elevii din clasă) din care trebuie să alegem trei, iar ordinea lor este foarte importantă (una este să ia Gigel premiul întâi, altceva este să ia Mărioara premiul întâi). Aşadar, vorbim despre aranjamente de 25 luate câte 3. Avem $A_{25}^3 = \dfrac{25!}{(25-3)!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = \ldots$

Dintr-o clasă cu 25 de elevi dorim să formăm o echipă de trei elevi. În câte feluri am putea forma o astfel de echipă? De această dată trebuie să alegem trei elevi din cei 25, iar ordinea lor nu mai contează (important este ca Gigel şi Mărioara să facă parte din aceeaşi echipă, nu contează în ce ordine îi chemăm la echipă). Vorbim, aşadar, despre combinări de 25 luate câte 3. Avem $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3!(25-3)!} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \ldots$

Vă propun acum să rezolvăm împreună câteva exemple luate din variantele propuse de către Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009.

Ex.6. Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele din mulţimea $\{1, 2, 3\}$.

Soluţie. Deoarece se folosesc toate elementele din mulţime (formăm numere de câte trei cifre) şi ordinea lor este importantă, rezultă că numărarea se face cu ajutorul permutărilor. Avem

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Aşadar, se pot forma 6 numere.

Ex.7. Să se determine numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soluţie. Din cele cinci elemente ale mulţimii trebuie să alegem două, iar ordinea acestor elemente nu are importanţă. Numărarea se face cu combinări. Avem

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10.$$

Ex.8. Să se determine numărul natural nenul n astfel încât numărul submulţimilor cu două elemente ale unei mulţimi cu n elemente să fie egal cu 6.

Soluţie. Ca mai sus, numărarea se face cu combinări. Trebuie să avem

$$C_n^2 = 6,$$

sau

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 6,$$

de unde obţinem

$$\frac{n(n-1)}{2} = 6,$$

sau

$$n^2 - n - 12 = 0,$$

cu soluţiile $n_1 = 4$ şi $n_2 = -3$.

Fiind vorba de numărul de elemente ale unei mulţimi, convine numai soluţia $n = 4$.

Nu numai cu ajutorul permutărilor, aranjamentelor sau combinărilor putem număra diferite situaţii concrete. Există şi alte modalităţi de numărare, totul depinde de contextul problemei ...

Una dintre modalităţile de numărare, pe care o întâlnim în exerciţii din subiectul I, este aşa numita regulă a produsului.

Dacă avem de efectuat mai multe operaţii succesive $(O_1, O_2, \ldots, O_p)$ şi fiecare dintre operaţii poate fi efectuată într-un număr de moduri (O_1 în m_1 moduri, O_2 în m_2 moduri, ..., O_p în m_p moduri), atunci succesiunea tuturor operaţiilor poate fi efectuată în $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_p$ moduri.

Pentru a înţelege mai bine, să rezolvăm împreună

Ex.9. Să se determine câte numere de trei cifre se pot scrie folosind doar cifre din mulţimea $\{1, 2\}$.

Soluţie. Operaţiile succesive sunt date de O_1: înlocuirea cifrei sutelor, O_2: înlocuirea cifrei zecilor, şi O_3: înlocuirea cifrei unităţilor, iar numărul modurilor de efectuare este, în fiecare dintre cazuri, 2.

Având în vedere cele de mai sus, înseamnă că se pot forma

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ numere}.$$

Necesitatea numărării unor situaţii apare şi în problemele cu probabilităţi.

Noţiunea de probabilitate o întâlnim, mai ales, în teoria jocurilor, atunci când trebuie să stabilim "şansa" de a se realiza o anumită situaţie. De exemplu, la aruncarea unui zar, ne propunem să obţinem faţa cu 4 puncte. Obţinerea feţei cu 4 puncte reprezintă un eveniment.

Probabilitatea realizării unui eveniment E se calculează cu formula

$$p(E) = \frac{NF}{NP},$$

unde cu $p(E)$ am notat probabilitatea, cu NF numărul cazurilor favorabile (cele care duc la realizarea evenimentului), şi cu NP numărul cazurilor posibile.

Să rezolvăm împreună

Ex.10. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr de două cifre format cu cifre din mulţimea A, acesta să aibă cifrele egale.

Soluţie. Evenimentul E este "să aleg un număr de două cifre, cu cifre egale".

Trebuie să stabilim NP, numărul cazurilor posibile, şi NF, numărul cazurilor favorabile.

Pentru NP trebuie stabilit câte numere de două cifre se pot forma cu cifre din mulţimea $\{1, 2, 3\}$.

(Problema este asemănătoare cu cea de la **Ex.9.**)

Numărul cazurilor posibile este

$$NP = 3 \cdot 3 = 9$$

Numărul cazurilor favorabile înseamnă numărul de numere cu cifre egale, evident trei $(11, 22, 33)$.

Aşadar

$$NF = 3.$$

Cu acestea

$$p(E) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Dacă tot am vorbit despre probabilităţi, să mai rezolvăm împreună două probleme.

Ex.11. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{10}\right\}$, acesta să fie raţional.

Soluţie. Evenimentul E este "să aleg un număr raţional".

$NP = 9$ (în mulţimea A sunt 9 elemente).

$NF = 2$ (în mulţimea A, numerele raţionale sunt $\sqrt{4} = 2$ şi $\sqrt{9} = 3$).

Atunci

$$p(E) = \frac{2}{9}.$$

Ex.12. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un element n din mulţimea $\{2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $2^n = n^2$.

Soluţie. Evenimentul E este "să fie adevărată relaţia $2^n = n^2$, când n se înlocuieşte cu un număr din mulţimea $\{2, 3, 4, 5\}$".

$NP = 4$ (numărul n se poate înlocui cu patru valori).

$NF = 2$ (relaţia devine adevărată la înlocuirea lui n cu 2, respectiv cu 4; $2^2 = 2^2$ şi $2^4 = 4^2$).

Atunci

$$p(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Încercaţi să rezolvaţi singuri

1. Să se calculeze $C_5^0 + C_5^1 - 2A_5^1$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{n!}{6} = (n-2)!,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

3. Să se determine câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu ajutorul cifrelor din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

4. Să se determine numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 91\}$, acesta să fie divizibil cu 13.

6. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cubul unui număr natural.

Succes!

Căutaţi cu Google `D_matematica_MT2` şi rezolvaţi, de acolo, exerciţii asemănătoare.