Ecuația de gradul II

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

1) Rezolvare

- dacă c = 0 ⇒ $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x\,(ax + b) = 0$ şi x_1=0, x_2= - $\frac{b}{a}$
- dacă b = 0 ⇒ $ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ şi dacă $-\frac{c}{a} < 0$ ecuația nu are soluții reale, iar dacă $-\frac{c}{a} \geq 0$ avem $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- dacă b ≠ 0, c ≠ 0 atunci $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se notează $\Delta = b^2 - 4ac$ şi avem cazurile:

a) $\Delta > 0$, ecuația are rădăcini reale distincte
b) $\Delta = 0$, ecuația are rădăcini reale egale
c) $\Delta < 0$, ecuația nu are rădăcini reale.

2) Relațiile între rădăcini şi coeficienți (Viete)

Notăm $x_1 + x_2 = S$, $x_1 x_2 = P$ şi avem

$S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$.

Este util să observăm că

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = S^2 - 2P$ şi

$x_1{}^3 + x_2{}^3 = S^3 - 3PS$.

3) Formarea ecuației de gradul al doilea când se cunosc rădăcinile:

$x^2 - Sx + P = 0$

4) Semnul rădăcinilor ecuației de gradul al doilea se stabileşte studiind semnul sumei şi produsului acestora:

- Dacă $P > 0 \Rightarrow$ rădăcinile au acelaşi semn şi anume ambele negative dacă $S < 0$, respectiv ambele pozitive dacă $S > 0$.

- Dacă $P = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ şi $x_2 < 0$ dacă $S < 0$, $x_2 = 0$ dacă $S = 0$ şi $x_2 > 0$ dacă $S > 0$.
- Dacă $P < 0 \Rightarrow$ rădăcini de semen contrare, şi dacă $S > 0$, rădăcina pozitivă are modulul mai mare, dacă $S < 0$ cea negativă are modulul mai mare, iar $S = 0$ arată că cele două rădăcini au acelaşi modul.

Aplicații

1) Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$

Avem condițiile $x \neq -2$, $x \neq -3$ şi eliminând numitorii

$6(\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 3 + \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 4) = 7(\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 6)$ şi după reducerea termenilor

asemenea obținem

$5x^2 + 13x = 0$, adică

$x(5x + 13) = 0$ şi

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{13}{5}$.

b) $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{x-1}{x-2}$

Avem condițiile

$x \neq \pm 2$ şi $2x^2 - x - 6 = x^2 + x - 2$, adică

$x^2 - 2x - 4 = 0$ şi

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$ adică

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

2) Dați exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care să aibă o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$.

Avem

$x_1 = \sqrt{3}$ şi vom considera la întâmplare, de exemplu $x_2 = 2$.

Avem

$S = 2 + \sqrt{3}$, $P = 2\sqrt{3}$ şi ecuația

$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

are o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$.

3) Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + 5x - 7 = 0$. Arătați că $x_1{}^3 + x_2{}^3 \in Z$.

Din relațiile lui Viete:
$x_1 + x_2 = -5$ şi

$x_1 x_2 = -7$, adică

$S \in Z, P \in Z$.

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS = (-5)^3 - 3(-5)(-7) \in Z$$

4) Determinați m∈ R pentru care ecuația:

$(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$, are rădăcini reale.

Dacă $m = 3$, ecuația devine

$15 - 10x = 0$ cu soluție $x = \frac{3}{2}$.
Dacă $m \neq 3$, ecuația de gradul al doilea are rădăcini reale dacă $\Delta \geq 0$.

Avem deci condiția:

$4(3m-4)^2-4(m-3)(m-6) \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2-3m-2 \geq 0$ şi deci

$$m \in (-\infty,-2] \cup \left[\frac{1}{2},\infty\right) \setminus \{3\}$$

Deci valorile cerute sunt: $m \in (-\infty,-2] \cup \left[\frac{1}{2},\infty\right)$

5) Se consideră ecuația $x^2+mx+2=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2. Aflați $m \in R$ pentru care ${x_1}^2+{x_2}^2=5$.

Folosim relațiile lui Viete şi avem

$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=2$ şi cum

${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ avem

$m^2-4=5$ şi deci

$m=\pm 3$.

6) Determinați m∈ R* astfel încât ecuația $x^2-3x+m=0$ să aibă rădăcini reale de semne opuse.

Avem condițiile $\Delta > 0$ şi $P<0$ adică $9-4m>0$ şi $m<0$, deci $m<\frac{9}{4}$ şi $m<0$. Soluție $m<0$.

7) Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Formăm ecuația $t^2-5t+6=0$ cu soluțiile $t_1=2$, $t_2=3$, deci sistemul are soluțiile (2,3) şi (3,2).

Propunem spre rezolvare:

1) Să se găsească ecuația de gradul al doilea ale cărei soluții verifică simultan relațiile:
$x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -3$

2) Se consideră ecuația $x^2 - x + m = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Determinați $m \in R$ pentru care $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = -\frac{3}{4}$.

3) Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in R$, care are rădăcinile reale x_1 și x_2. Ştiind că $|x_1 - x_2| = 1$, determinați m.

(Indicație: $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1 x_2 = 1$ sau $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$ şi apoi se folosesc relațiile lui Viete)

4) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + x - 1 = 0$. Demonstrați că
$$\frac{x_1}{{x_2}^2} + \frac{x_2}{{x_1}^2} \in Z$$

5) Arătați că mulțimea $\{x \in R | x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0\}$ are două elemente oricare ar fi $m \in R$.
(Indicație: mulțimea are 2 elemente dacă ecuația de gradul al II lea are 2 rădăcini reale distincte, deci condiția $\Delta > 0$ pentru orice $m \in R$)

6) Rezolvați sistemul:
$$\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8 \end{cases}$$

(Indicație: x și y sunt soluțiile ecuației $t^2 + 6t + 8 = 0$)