Derivata unei funcții. Interpretare geometrică

Definiții

Fie funcția $f: I \to R, I \subset R$ şi $x_0 \in I$ un punct de acumulare al lui I.

1. Funcția f *are derivată* în $x_0 \in I$ dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R}$$

Valoarea acestei limite notată $f'(x_0)$ se numeşte *derivata* funcției f în punctul x_0.

2. Funcția f *este derivabilă* în $x_0 \in I$ dacă limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există şi este finită.

3. Funcția f *este derivabilă* pe I dacă este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$.

   - Mulțimea pe care funcția este derivabilă se numeşte *domeniu de derivabilitate.*
   - Funcția $f': J \to R$ (unde $J \subset I$ este domeniul de derivabilitate) care asociază fiecărui punct $x_0 \in J$ numărul real $f'(x_0)$ se numeşte *derivata* funcției f sau *funcția derivată* a funcției f.

Interpretarea geometrică a derivatei într-un punct

Fie $f: I \to R, I \subset R$ care admite derivată în $x_0 \in I$.
Din punct de vedere geometric, derivata funcției în x_0, dacă există, reprezintă panta tangentei la graficul funcției în punctul $(x_0, f(x_0))$.

- Dacă $f'(x_0)$ este finită, ecuația tangentei se scrie:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- Dacă $f'(x_0) = \pm\infty$, tangenta la grafic în x_0 este paralelă cu axa Ox şi ecuația ei este:

$$x = x_0.$$

- Dacă $f'(x_0) = 0$, tangenta este paralelă cu axa Ox şi ecuaţia ei este:

$$y = f(x_0).$$

Derivatele funcţiilor elementare

1. Funcţia constantă $f: R \to R,\ f(x) = c \epsilon R$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{c' = 0}$$

2. Funcţia $f: R \to R,\ f(x) = x^n, n \epsilon N^*$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

3. Funcţia $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = x^\alpha, \alpha \in R$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Cazuri particulare:

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}},\ x \epsilon (0,\infty)$$

4. Funcţia $f: R \to (0,\infty),\ f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

cu cazul particular:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

5. Funcţia $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = \ln x$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Observaţie: Pentru funcţia $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = \log_a x$ obţinem:

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

6. Funcțiile $f, g: R \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ sunt derivabile pe R şi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

7. Funcția $f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\right\} \to R$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este derivabilă pe domeniul de definiție şi

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

8. Funcția $f: R - \{k\pi | k \epsilon Z\} \to R$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este derivabilă pe domeniul de definiție şi

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}}$$

9. Funcția $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$ este derivabilă pe (-1,1) şi

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

10. Funcția $f: [-1,1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ este derivabilă pe (-1,1) şi

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

11. Funcția $f: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este derivabilă pe R *şi*

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

12) Funcția $f: R \to (0, \pi), f(x) = \operatorname{arcctg} x$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(\operatorname{artctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}}$$

.

Operații cu funcții derivabile

- Dacă $f, g : I \to R$ sunt funcții derivabile pe I, atunci $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile pe I şi

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$
$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}.$$

Observații

- Cele două reguli de derivare se pot extinde pentru un număr finit de funcții derivabile şi avem:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 f_2 \dots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \dots f_n$$

(derivata unui produs de n factori este o sumă de n termeni, în fiecare o funcție fiind derivată şi celelalte nu).

Caz particular. Dacă $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$, rezultă

$$\boxed{(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}}$$

- Dacă g este funcția constantă, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

Derivarea funcțiilor compuse

- Dacă $f: J \to R$ şi $u: I \to J, u$ derivabilă în orice punct $x \in I$, iar f derivabilă în $y = u(x) \in J$, atunci funcția $f^\circ u$ este derivabilă şi

$$\boxed{(f^\circ u)'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))}.$$

Observații

- Teorema se poate extinde la o compunere de mai multe funcții. Pentru 3 funcții avem:

$$(f^\circ g^\circ h)'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \cdot f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

- Prin particularizarea funcției f se obțin următoarele reguli de derivare ale funcțiilor compuse, pe domeniul de existență:

1) $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha u' \cdot u^{\alpha-1},\ \alpha \in R}$ cu cazurile particulare:

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$; $\boxed{\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}}$ și $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

2) $\boxed{(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a}$ cu cazul particular $\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$

3) $\boxed{(\ln u)' = u' \cdot \frac{1}{u}}$

4) $\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u}$; $\boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \sin u}$

5) $\boxed{(\mathrm{tg}\, u)' = u' \cdot \frac{1}{\cos^2 u}}$; $\boxed{(\mathrm{ctg}\, u)' = -u' \cdot \frac{1}{\sin^2 u}}$

6) $\boxed{(\arcsin u)' = u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}$

7) $\boxed{(\arccos u)' = -u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}$

8) $\boxed{(\mathrm{arctg}\, u)' = u' \cdot \frac{1}{1+u^2}}$

9) $\boxed{(\mathrm{arcctg}\, u)' = -u' \cdot \frac{1}{1+u^2}}$