Derivata unei funcții. Interpretare geometrică

Definiții

Fie funcția $f: I \to R, I \subset R$ şi $x_0 \in I$ un punct de acumulare al lui I.

1. Funcția f *are derivată* în $x_0 \in I$ dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R}$$

Valoarea acestei limite notată $f'(x_0)$ se numeşte *derivata* funcției f în punctul x_0.

2. Funcția f *este derivabilă* în $x_0 \in I$ dacă limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există şi este finită.

3. Funcția f *este derivabilă* pe I dacă este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$.

- Mulțimea pe care funcția este derivabilă se numeşte *domeniu de derivabilitate.*
- Funcția $f': J \to R$ (unde $J \subset I$ este domeniul de derivabilitate) care asociază fiecărui punct $x_0 \in J$ numărul real $f'(x_0)$ se numeşte *derivata* funcției f sau *funcția derivată* a funcției f.

Interpretarea geometrică a derivatei într-un punct

Fie $f: I \to R, I \subset R$ care admite derivată în $x_0 \in I$.
Din punct de vedere geometric, derivata funcției în x_0, dacă există, reprezintă panta tangentei la graficul funcției în punctul $(x_0, f(x_0))$.

- Dacă $f'(x_0)$ este finită, ecuația tangentei se scrie:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- Dacă $f'(x_0) = \pm\infty$, tangenta la grafic în x_0 este paralelă cu axa Ox şi ecuația ei este:

$$x = x_0.$$

- Dacă $f'(x_0) = 0$, tangenta este paralelă cu axa Ox şi ecuația ei este:

$$y = f(x_0).$$

Derivatele funcțiilor elementare

1. Funcția constantă $f: R \to R,\ f(x) = c\epsilon R$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{c' = 0}$$

2. Funcția $f: R \to R,\ f(x) = x^n, n\epsilon N^*$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

3. Funcția $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = x^\alpha, \alpha \in R$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Cazuri particulare:

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}},\ x\epsilon(0,\infty)$$

4. Funcția $f: R \to (0,\infty),\ f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

cu cazul particular:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

5. Funcția $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = \ln x$ este derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Observație: Pentru funcția $f: (0,\infty) \to R,\ f(x) = \log_a x$ obținem:

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

6. Funcțiile $f, g: R \to [-1,1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ sunt derivabile pe R şi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

7. Funcția $f: R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\right\} \to R$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ este derivabilă pe domeniul de definiție şi

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

8. Funcția $f: R - \{k\pi | k\epsilon Z\} \to R$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este derivabilă pe domeniul de definiție şi

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}}$$

9. Funcția $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$ este derivabilă pe (-1,1) şi

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

10. Funcția $f: [-1,1] \to [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$ este derivabilă pe (-1,1) şi

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

11. Funcția $f: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ este derivabilă pe R *şi*

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

12) Funcția $f: R \to (0, \pi), f(x) = \operatorname{arcctg} x$ este derivabilă pe R şi

$$\boxed{(\operatorname{artctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}}$$

.

Operații cu funcții derivabile

- Dacă $f, g : I \to R$ sunt funcții derivabile pe I, atunci $f + g$ şi $f \cdot g$ sunt derivabile pe I şi

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}.$$

Observații

- Cele două reguli de derivare se pot extinde pentru un număr finit de funcții derivabile şi avem:

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \ldots f_n$$

(derivata unui produs de n factori este o sumă de n termeni, în fiecare o funcție fiind derivată şi celelalte nu).

Caz particular. Dacă $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$, rezultă

$$\boxed{(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}}$$

- Dacă g este funcția constantă, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

Derivarea funcțiilor compuse

- Dacă $f : J \to R$ şi $u : I \to J, u$ derivabilă în orice punct $x \in I$, iar f derivabilă în $y = u(x) \in J$, atunci funcția $f \circ u$ este derivabilă şi

$$\boxed{(f \circ u)'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))}.$$

Observații

- Teorema se poate extinde la o compunere de mai multe funcții. Pentru 3 funcții avem:

$$(f \circ g \circ h)'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) \cdot f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

- Prin particularizarea funcției f se obțin următoarele reguli de derivare ale funcțiilor compuse, pe domeniul de existență:

1) $\boxed{(u^{\alpha})' = \alpha u' \cdot u^{\alpha-1},\ \alpha \in R}$ cu cazurile particulare:

$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$; $\boxed{\left(\sqrt[3]{u}\right)' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}}$ și $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

2) $\boxed{(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a}$ cu cazul particular $\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$

3) $\boxed{(\ln u)' = u' \cdot \frac{1}{u}}$

4) $\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u}$; $\boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \sin u}$

5) $\boxed{(\operatorname{tg} u)' = u' \cdot \frac{1}{\cos^2 u}}$; $\boxed{(\operatorname{ctg} u)' = -u' \cdot \frac{1}{\sin^2 u}}$

6) $\boxed{(\arcsin u)' = u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}$

7) $\boxed{(\arccos u)' = -u' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}$

8) $\boxed{(\operatorname{arctg} u)' = u' \cdot \frac{1}{1+u^2}}$

9) $\boxed{(\operatorname{arcctg} u)' = -u' \cdot \frac{1}{1+u^2}}$

Aplicații

1) Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = e^x + x^2$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Pentru $x_0 = 1$ obținem

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1).$$

Avem $f'(x) = e^x + 2x$ şi deci $f'(1) = e + 2$.
Rezultă

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e + 2.$$

2) Se consideră funcția $f: R - \{1\} \to R,\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1).$$

Calculăm $f'(x)$ folosind formula de derivare a câtului.
Avem

$$f'(x) = \frac{x - 1 - (x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

şi

$$f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\frac{1}{2}.$$

3) Se consideră $f\colon R^* \to R, f(x)=x^3+\frac{3}{x}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

- Din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1).$$

Avem

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}$$

şi

$$f'(1)=0,$$

deci

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0.$$

4) Se consideră funcția $f\colon (0,\infty)\to R, f(x)=(x-3)\ln x$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

- Folosind regula de derivare a produsului, avem

$$f'(x)=\ln x+(x-3)\cdot\frac{1}{x}.$$

Din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

şi, cum

$$\ln 1=0, f'(1)=-2,$$

rezultă că limita cerută este egală cu -2.

5) Se consideră funcția $f\colon (0,\infty)\to R, f(x)=\sqrt{x}-\ln x$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}.$$

- Avem

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{x}$$

şi din definiția derivatei

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4).$$

Cum $f'(4)=0,$ rezultă

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0.$$

6) Se consideră $f: R\to R, f(x)=x^{2012}-2012(x-1)-1$. Să se calculeze $f(0)+f'(0)$ şi să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=1$.

- Avem

$$f'(x)=2012\cdot x^{2011}-2012$$

şi deci

$$f(0)+f'(0)=2012-1-2012=-1.$$

Ecuația tangentei este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

şi, cum

$$x_0=1, f(1)=0, f'(1)=0,$$

rezultă $y=0$.

7) Se consideră $f: R\to R, f(x)=e^x-1$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă -1.

- Avem

$$f'(x)=e^x,\qquad f(-1)=\frac{1}{e}-1,\qquad f'(-1)=\frac{1}{e}$$

şi, cum ecuația tangentei este

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1),$$

rezultă

$$y-\left(\frac{1}{e}-1\right)=\frac{1}{e}\,(x-1),$$

adică

$$y=\frac{1}{e}\cdot x-1.$$

8) Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x)=e^{x}-ex-1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției în $O(0,0)$ şi dreapta de ecuație $x=1$.

- Avem

  $$f'(x)=e^{x}-e$$

  şi

  $$f'(0)=1-e.$$

  Ecuația tangentei în O este

  $$y=(1-e)x.$$

  Coordonatele punctului de intersecție al tangentei cu dreapta dată se obțin rezolvând sistemul format din ecuațiile lor:

  $$\begin{cases} y=(1-e)x \\ x=1 \end{cases}$$

  şi deci punctul căutat are coordonatele $x=1, y=1-e$.

9) Se consideră funcția $f:[1,\infty), f(x)=e^{x}+\frac{x-1}{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(1,e)$.

- Avem

  $$f'(x)=e^{x}+\frac{x-x+1}{x^{2}}=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}$$

  şi

  $$f'(1)=e+1.$$

  Ecuația tangentei este

  $$y-f(1)=f'(1)(x-1),$$

  adică

  $$y-e=(e+1)(x-1)$$

  sau

$$y = (e+1)x - 1.$$

10) Se consideră $f:(0,\infty) \to R, f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

- Avem

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

adică

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

şi

$$f'(1) = 0.$$

Cum $f(1) = -1$, rezultă că ecuația tangentei este

$y + 1 = 0$, adică $y = -1$ (o paralelă la axa Ox).

11) Se consideră $f:(0,\infty) \to R, f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = e$.

- Derivăm f ca un cât şi avem

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$

adică

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Cum $f'(e) = 0, f(e) = \frac{1}{e}$ şi ecuația tangentei este

$$y - f(e) = f'(e)(x - e).$$

Rezultă $y - \frac{1}{e} = 0$ sau $y = \frac{1}{e}$.

12) Se consideră $f:(1,\infty) \to R,\ f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 3$.

- Avem

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2},$$

adică

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

şi

$$f'(3) = \frac{e^3}{4}.$$

Cum

$$f(3) = \frac{e^3}{2}$$

şi ecuația tangentei este

$$y - f(3) = f'(3)(x-3),$$

obținem

$$y - \frac{e^3}{2} = \frac{e^3}{4}(x-3)$$

sau

$$y = \frac{e^3}{4}x - \frac{e^3}{4}.$$