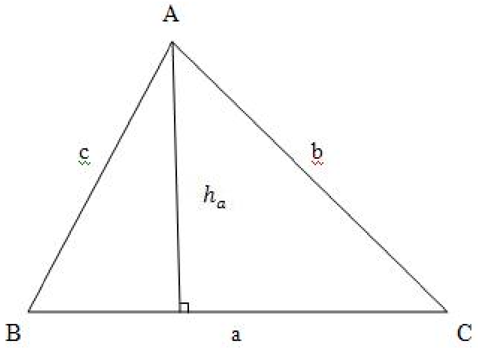
# Aplicații ale trigonometriei în geometrie




Fiind dat triunghiul ABC, vom folosi următoarele notații:

- $a, b, c$ pentru lungimile laturilor $[BC], [AC]$, respectiv $[AB]$;
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ semiperimetrul;
- $A, B, C$ pentru măsurile unghirilor triunghiului;
- $h_a, h_b, h_c$ - lungimile înălțimilor triunghiului;
- $R$ - lungimea razei cercului circumscris, al cărui centru se află la intersecția mediatoarelor;
- $r$ - lungimea razei cercului încris, al cărui centru se află la intersecția bisectoarelor;
- $S$ - aria triunghiului.

Trecem în revistă următoarele rezultate importante:

1) **Teorema sinusurilor**: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

**Teorema cosinusurilor:**

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ şi analog $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2) Formule pentru $R, r$:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}.$$

3) Formule pentru aria triunghiului:

a) $S = \frac{1}{2} ah_a$ şi analog $S = \frac{1}{2}\ bh_b, S = \frac{1}{2}\ ch_c$
b) $S = \frac{1}{2}\ bc \sin A$ şi $S = \frac{1}{2}\ ac \sin B\ , S = \frac{1}{2}\ ab \sin C$
c) (Heron) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Observație: Este util pentru rezolvarea problemelor care apar în variantele de bacalaureat să amintim câteva dintre teoremele referitoare la triunghiul dreptunghic:

1) Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei. (Pitagora)
2) Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

3) Într-un triungji dreptunghic, lungimea catetei care se opune unui unghi de $30^0$ este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

**Aplicații**

1) Să se calculeze $\sin A$, ştiind că în triunghiul ABC se cunosc $AB = 4, BC = 2$ şi $m(\hat{C}) = 60^0$.

Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ şi cum se cunosc

$BC = a = 2$, $AB = c = 2$ şi $m(\hat{C}) = 60^0$,

rezultă $\frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^0}$ şi dacă

$4 \sin A = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde

$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) Să se calculeze $\sin A$, ştiind că în triunghiul ABC se cunosc latura $BC = 10$ şi raza cercului circumscris egală cu 10.

Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = 2R$, deci

$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}$, deci

$m(\hat{A}) = 30^0$.

3) Să se calculeze lungimea laturii $AC$ a triunghiului $ABC$ ştiind că $m(\hat{B}) = 45^0, m(\hat{C}) = 30^0$ şi $AB = 10$.

Din teorema sinusurilor :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Avem $AB = c = 10$, $\sin B = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin C = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$ şi deci

$$b = AC = \frac{c\ \sin B}{\sin C} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 10\sqrt{2}.$$

4) Să se calculeze lungimea laturii $BC$ a triunghiului $ABC$ ştiind că $m(\hat{A}) = 30^0$ şi raza cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.

Din $\frac{a}{\sin A} = 2R$ rezultă

$a = 2R \sin A$, deci

$BC = 2 \cdot 4 \sin 30^0 = 4$.

5) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului $ABC$ ştiind că $BC = 20$ şi $m(\hat{A}) = 60^0$.

Din $\frac{a}{\sin A} = 2R$ rezultă

$R = \frac{a}{2 \sin A}$, adică

$R = \frac{20}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ şi deci

$R = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

6) În triunghiul $ABC$ se cunosc $AB = AC = 6$ şi $BC = 6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

Avem $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$ din teorema cosinusurilor.

Rezultă $\cos B = \frac{36 + 36 \cdot 3 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{36 \cdot 3}{2 \cdot 36\sqrt{3}}$, adică

$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi

$m(\hat{B}) = 30^0$.

7) Să se determine lungimea laturii $BC$ a triunghiului $ABC$, ştiind că $AC = 6, AB = 4$ şi $m(\hat{A}) = 60^0$.

Din teorema cosinusurilor

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ şi cum

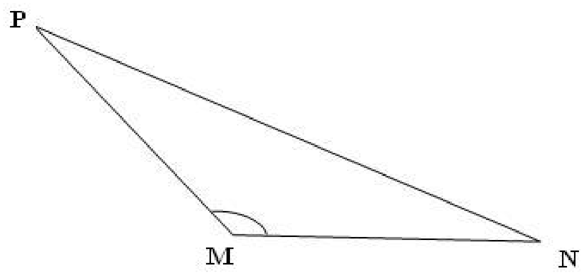
$AC = b = 6, AB = c = 4$, avem

$\cos 60^0 = \frac{36 + 16 - a^2}{2 \cdot 6 \cdot 4}$ şi
$a^2 = 52 - 48 \cdot \frac{1}{2}$, deci

$a^2 = 28$, rezultă

$a = 2\sqrt{7}$.

8) Calculați perimetrul triunghiului $NMP$ , ştiind că $MN = 2, MP = 3$ şi $\widehat{MNP} = 120^0$.




Perimetrul este egal cu suma lungimilor laturilor triunghiului.
Din teorema cosinusurilor
$\cos M = \frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2MN\cdot MP}$.
Rezultă

$NP^2 = 4 + 9 - 12\cos 120^0$,
$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) =$
$-\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$ şi deci
$NP^2 = 13 + 6$.

Avem $NP = \sqrt{19}$ şi $MN + MP + NP = 5 + \sqrt{19}$.

9) Să se calculeze aria triunghiului $MNP$ dacă $MN = MP = 6$ şi $m(\widehat{PMN}) = 120^0$.

Avem

$S = \frac{1}{2}MN \cdot MP \cdot \sin\widehat{PMN} = \frac{1}{2}\cdot 36 \cdot \sin 120^0 = 18\sin(180^0 - 60^0) = 18\sin 60^0 = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

10) Aflați aria triunghiului $MNP$ dacă $MN = 6, NP = 4$ şi $m(\widehat{MNP}) = 45^0$.

Avem $S = \frac{1}{2}MN \cdot NP \cdot \sin\widehat{MNP} = \frac{1}{2}\cdot 24 \cdot \sin 45^0$ şi deci

$S = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

11) Să se calculeze lungimea înălțimii din $A$ a triunghiului $ABC$, ştiind că $AB = 3, AC = 4$ şi $BC = 5$.

Observăm că $AB^2 + AC^2 = BC^2$ şi deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$.

Rezultă $S = \frac{AC\cdot AB}{2} = \frac{BC\cdot h_a}{2}$ şi deci

$6 = \frac{5\cdot h_a}{2}$, de unde rezultă

$h_a = \frac{12}{5}$.

12) Să se calculeze lungimea laturii $BC$ a triunghiului $ABC$, ştiind că $m(\hat{A}) = 90^0, m(\hat{B}) = 30^0$ şi $AB = 4\sqrt{3}$.

Triunghiul este dreptunghic în $A$ şi $m(\hat{B}) = 30^0$ şi deci cateta $AC$ care se opune unghiului de $30^0$ este egală cu $\frac{BC}{2}$ .

Din teorema lui Pitagora

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, deci

$48 + \frac{BC^2}{4} = BC^2$ sau

$4 \cdot 48 = 3BC^2$, de unde

$BC = 8.$

13) Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu aria egală cu 18 şi măsura unui unghi $45^0$.

Un triunghi dreptunghic cu un unghi $45^0$ este isoscel, deci cele 2 catete au aceeaşi lungime. Cum aria triunghiului este egală cu semiprodusul catetelor, rezultă că, dacă notăm

$AB = AC = c$, rezultă că

$\frac{1}{2}c^2 = 18$, deci

$c^2 = 36$ şi

$c = 6.$

14) Să se demosntreze că într-un triunghi dreptunghic $ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90^0$ are loc $AD^2 = AB \cdot AC \cdot \sin A \cdot \sin C$, unde $D$ este piciorul înălțimii din $A$.

Folosind definițiile funcțiilor trigonometrice în triunghiul dreptunghic avem că sinusul unui unghi ascuțit este raportul dintre cateta opusă şi ipotenuză.

Aplicând în triunghiurile dreptunghice $DAB$ şi $DAC$ avem

$\sin B = \frac{AD}{AB}$ şi

$\sin C = \frac{AD}{AC}$.

Înmulțind cele 2 relații membru cu membru rezultă $AB \cdot AC \cdot \sin A \cdot \sin C = AD^2$.

15) Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$, ştiind că $AB = 8, BC = 10$ şi $m(\widehat{BCD}) = 150^0$.

Aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului $ABC$. Într-un paralelogram unghiurile alăturate sunt suplementare şi deci $m(\widehat{ABD}) = 30^0$. Rezultă că aria cerută este

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^0 = 80 \sin 30^0 = 40.$$

16) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul cu lungimile laturilor de 13, 14, 15.

Avem $r = \frac{S}{p}$, unde $S$ este aria triunghiului şi $p$ semiperimetrul.

Cum $p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$,

$p - a = 21 - 13 = 8, p - b = 21 - 14 = 7$ şi

$p - c = 21 - 15 = 6$.

Din formula lui Heron

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 16} = 3 \cdot 7 \cdot 4$ şi $r = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4}{21} = 4$.

17) Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi cu lungimile laturilor 5, 7 şi 8.

Vom folosi $R = \frac{abc}{4S}$.

Calculăm $S$ folosind formula lui Heron:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Rezultă

$S = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$ şi deci

$r = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{10\sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$ .

**Propunem spre rezolvare:**

1) Să se calculeze lungimea laturii $AC$ a triunghiului $ABC$, ştiind că $BC = \sqrt{2}$, $m(\widehat{BAC}) = 30^0$ şi $m(\widehat{ABC}) = 45^0$.

2) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului $ABC$, ştiind că $AB = 3$ şi $m(\hat{C}) = 30^0$.

3) Să se determine lungimile laturii $AC$ a triunghiului $ABC$, dacă $AB = 10, BC = 15$ şi $m(\hat{B}) = 60^0$.

4) Să se determine aria triunghiului $ABC$, ştiind că $AB = AC = 4$ şi $m(\hat{A}) = 30^0$.

5) Se consideră triunghiul $ABC$ de arie egală cu 7. Să se calculeze lungimea laturii $AB$, ştiind că $AC = 2$ şi $m(\hat{A}) = 30^0$.

6) Să se calculeze aria unui dreptunghi $ABCD$, ştiind că $AC = 10$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30^0$.

(Indicație: $m(\widehat{BAC}) = 30^0$, rezultă

$BC = \frac{1}{2}AC = 5,\ AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 5\sqrt{3}$ şi aria

$ABCD = 2ariaABC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3},$

altfel: în triunghiul dreptunghic $ABC$ avem

$\sin 30^0 = \frac{BC}{10}$ şi

$\cos 30^0 = \frac{AB}{10}$ de unde

$BC = 5$ şi

$AB = 5\sqrt{3}$ etc.)

7) Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul cu lungimile laturilor egale cu $3, 5, 7$.

8) Fie triunghiul $ABC$ cu $AB = 5, AC = 6$ şi $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului.

(Indicație: din teorema cosinusului se află $BC$ şi apoi

$R = \frac{abc}{4S}$. $S$ se poate afla fie din formula lui Heron, fie din

$\cos A = \frac{3}{5}$ rezultă

$\sin A = \sqrt{1 - cos^2 A} = \frac{4}{5}$ şi $= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sinA$ )