Aplicații ale integralei definite

Aplicații

1) Se consideră funcțiile $I_n: R \to R, n \in N, f_0(x) = 1$ şi $I_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției I_2, axa Ox şi dreptele $x = 0, x = 1$.

- Avem $I_1(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$.

  $$\mathcal{A} = aria\,(\Gamma_f) = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

2) Se consideră $f, F: R \to R, f(x) = x\, e^x,\ F(x) = (x-1)\, e^x$.

a) Verificați că F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x = 0, x = 1$.

a) F este o primitivă a lui f dacă este derivabilă şi $F' = f$.

Avem $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = x\, e^x = f(x)$, deci F este primitiva lui f.

b) Cum pentru $x \in [0,1], f(x) \geq 0$, aria cerută este

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\, e^x dx = F(1) - F(0) = 0 + 1 = 1.$$

3) Se consideră $f: [2,\infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$. Să se determine $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 2$ şi $x = a$ să fie $\ln 3$.

- Avem $\int_2^a f(x)dx = \ln 3$.

  Rezultă $\int_2^a \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln 3$,

  adică $(\ln 3 + \ln(x-1))\big|_2^a = \ln 3$

  sau $\ln\frac{a(a-1)}{2} = \ln 3$,

  de unde $a^2 - a - 6 = 0$

  cu soluțiile $a = -2$ şi $a = 3$.

Cum $a > 2$, convine $a = 3$.

4) Fie $f, F: (0, \infty) \to R, f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ şi $F(x) = x - \ln x$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox şi dreptele $x = 1$ şi $x = e$.

- Cum $F(x) = x - \ln x$ este derivabilă şi
  $F' = 1 - \frac{1}{x} = f(x)$,

  rezultă că F este o primitivă a funcției f.

b) $\mathcal{A} = \int_1^e (x - \ln x)dx = \frac{x^2}{2}|_1^e - \int_1^e \ln x\, dx$.

Integrând prin părți rezultă că

$\int_1^e \ln x\, dx = x\ \ln x\,|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e = 1$ şi

$\mathcal{A} = \frac{e^2-1}{2} - 1 = \frac{e^2-3}{2}$.

5) Fie $f: R \to R, f(x) = e^x + x^2 + 2x$. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h: [0, 1] \to R, h(x) = \frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele $x = 0, x = 1$.

- Avem $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0, \forall x \in R$ şi deci

  $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x + 1)|_0^1 = \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$.

6) Se consideră $f: [0, 1] \to R, f(x) = \sqrt{x + 2}$. Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

- Evident $f(x) > 0$ şi

  $\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{x + 2}dx = \int_0^1 (x + 2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x + 2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$.

7) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între, graficul funcției
$f: [0, 1] \to R, f(x) = e^x(2x^2 - 2x + 1)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$.

- Cum $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + (x - 1)^2 > 0$,

  rezultă $f(x) > 0$ şi

$$\mathcal{A}=\int_0^1 e^x(2x^2-2x+1)dx.$$

Integrăm prin părți și avem

$$\mathcal{A}=e^x(2x^2-2x+1)|_0^1 - \int_0^1 e^x(4x-2)dx = e-1-\left[e^x(4x-2)|_0^1-4\int_0^1 e^x dx\right]$$
$$=e-1-(2e+2-4e^x)|_0^1=e-1-2e-2+4e-4=3e-7.$$

8) Se consideră $f:[0,1]\to R, f(x)=\frac{x^3}{x+1}$. Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$.

- Avem $\mathcal{A}=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\mathrm{dx}=\int_0^1\frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{dx}$.

  Cum $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ rezultă
  $$\mathcal{A}=\int_0^1\left(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1-\frac{1}{\mathrm{x}+1}\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{\mathrm{x}^3}{3}-\frac{\mathrm{x}^2}{2}+\mathrm{x}-\ln(\mathrm{x}+1)\right]|_0^1=\frac{5}{6}-\ln 2.$$

9) Determinați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $f:[0,1]\to R, f(x)=1-x$.

- Avem $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1(1-x)^2dx=\pi\int_0^1(1-2x+x^2)dx=$
  $$=\pi\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)|_0^1=\pi\left(1-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

10) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to R, g(x)=3^{-x}$.

- $V(C_f)=\pi\int_0^1 3^{-2x}dx=-\frac{\pi}{2\ln 3}\cdot 3^{-2x}|_0^1=-\frac{\pi}{2\ln 3}(3^{-2}-1)=\frac{\pi}{2\ln 3}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4\pi}{9\ln 3}$.

11) Se consideră $f:R\to R, f(x)=x+e^{-x}$. Determinați volumul obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to R, g(x)=f(x)+f(-x)$.

- Avem $f(x)+f(-x)=x+e^{-x}-x+e^x=e^x+e^{-x}$ și
  $$V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx=\pi\left(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{2}+2x\right)|_0^1=$$

$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(e^4+4e^2-1)}{2e^2}.$

12) Fie $f:(0,\infty) \to R, f(x) = x - \frac{1}{x}$. Dacă $g,h:[1,e] \to R, g(x) = f(x)$ şi $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, arătați că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox a graficelor funcțiilor g şi h sunt egale.

- $V(C_g) = \pi\int_1^e f^2(x)dx = \pi\int_1^e (x - \frac{1}{x})^2 dx$ şi
  $V(C_h) = \pi\int_1^e f^2\left(\frac{1}{x}\right)dx = \pi\int_1^e (\frac{1}{x} - x)^2 dx.$

  Cum $(x - \frac{1}{x})^2 = (\frac{1}{x} - x)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$, cele două volume sunt egale.

13) Dacă $f:[0,1] \to R, f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, aflați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

- $V(C_f) = \pi\int_0^1 x^2(2 - x^2)dx = \pi\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{7\pi}{15}.$

14) Fie $f:[0,1] \to R, f(x) = e^{x^3}$. Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1] \to R, g(x) = xf(x)$.

- $V(C_g) = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^2 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x^3}dx = \frac{\pi}{6}\int_0^1 6x^2 e^{2x^3}dx =$
  $$= \frac{\pi}{6}e^{2x^3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(e^2 - 1).$$

15) Se consideră funcția $f:[0,1] \to R, f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Folosind faptul că $1 \le (x+1)^2 \le 4$ pentru orice $x \in [0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

- Avem $V(C_f) = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2}dx.$

  Din $1 \le (x+1)^2 \le 4$ rezultă

  $\frac{1}{4} \le \frac{1}{(x+1)^2} \le 1$, adică

  $\frac{x^6}{4} \le \frac{x^6}{(x+1)^2} \le x^6$ şi integrând pe $[0,1]$ obținem

  $\int_0^1 \frac{x^6}{4}dx \le \int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2}dx \le \int_0^1 x^6 dx$ şi deci

  $\int_0^1 \frac{x^6}{4}dx \le V(C_f) \le \pi\int_0^1 x^6 dx$ sau

$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^7}{7} |_0^1 \leq V(C_f) \leq \pi \cdot \frac{x^7}{7} |_0^1$,

deci $\frac{\pi}{28} \leq V(C_f) \leq \frac{\pi}{7}$

16) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

a) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = 2$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului $g: [1, 2] \to R$, $g(x) = f(x)$.

- a) $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx = [\ln x + \ln(x+1)] |_1^2 = \ln \frac{x+1}{x} |_1^2 = \ln \frac{3}{2} - \ln 2 = \ln \frac{3}{4}$

- b) $V(C_f) = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^2 dx =$

$$= \pi \int_1^2 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left[\frac{1}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} + 2(\ln x - \ln(x+1)) - \frac{1}{x+1}\right] |_1^2 =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2} + 2(\ln 2 - \ln 3) - \frac{1}{3} + 1 - 2(\ln 1 - \ln 2) + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \pi \left(2 \ln \frac{2}{3} + 2 \ln 2 + \frac{2}{3}\right) = \pi \left(\frac{2}{3} + 2 \ln \frac{4}{3}\right).$$