MATRICE. DETERMINANŢI.

ION CICU

ABSTRACT. Materialul îşi propune o abordare strict la nivelul cerinţelor necesare rezolvării problemelor care apar în subiectul II al examenului de bacalaureat M2.

Pentru ceea ce avem noi nevoie în abordarea problemei 1 de la Subiectul II, este suficient să privim o matrice[1] ca pe un tablou cu linii şi coloane.

Forma unei matrice este

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Numerele $a_{i,j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, sunt elementele matricei; i reprezintă indicele liniei, iar j reprezintă indicele coloanei.

Se zice, în acest caz, că avem o matrice cu m linii şi n coloane, sau o matrice $m \times n$ ("m ori n").

Matricea

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice coloană.

Matricea

$$L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice linie.

Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice pătratică de ordin n.

Mulţimea matricelor pătratice de ordin n, cu elemente numere reale, se notează $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[1] Cuvântul *matrice* se foloseşte şi la singular, şi la plural; o matrice – două matrice.

Matricea

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se numeşte matrice unitate de ordin n.

Majoritatea problemelor care apar în subiectele de bacalaureat se referă la matrice pătratice de ordin 2 sau 3. Din acest motiv o să exemplificăm operaţiile cu matrice folosind astfel de exemple.

Operaţii cu matrice.

1. Înmulţirea unei matrice cu un număr (scalar).

Se înmulţeşte fiecare element al matricei cu acel număr.

Dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

atunci

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{1,1} & \alpha \cdot a_{1,2} & \alpha \cdot a_{1,3} \\ \alpha \cdot a_{2,1} & \alpha \cdot a_{2,2} & \alpha \cdot a_{2,3} \\ \alpha \cdot a_{3,1} & \alpha \cdot a_{3,2} & \alpha \cdot a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

2. Adunarea a două matrice.

Se adună elementele care ocupă acelaşi loc în cele două matrice.

Se adună numai matricele de acelaşi fel (care au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane).

Dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix},$$

atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

3. Înmulţirea a două matrice.

Regula de înmulţire este "linie $\times$ coloană". Fiecare element al lui $A \cdot B$ se obţine ca o sumă de produse între elementele unei linii din prima matrice şi elementele unei coloane din cea de a doua matrice.

Pentru o mai bună înţelegere folosim ca exemplu două matrice pătratice de ordin 3 pe care le aşezăm ca mai jos.

$$
\begin{array}{c|c}
\times & B=\begin{pmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{pmatrix} \\
\hline
A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & A\cdot B=\begin{pmatrix} am+bq+ct & an+br+cu & ap+bs+cv \\ dm+eq+ft & dn+er+fu & dp+es+fv \\ gm+hq+it & gn+hr+iu & gp+hs+iv \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Elementul $a_{1,1}$ din matricea $A\cdot B$ este suma produselor dintre elementele primei linii a lui A şi elementele primei coloane a lui B (urmăriţi cu atenţie primul element al lui $A\cdot B$); elementul $a_{1,2}$ din matricea $A\cdot B$ este suma produselor dintre elementele primei linii a lui A şi elementele celei de a doua coloane a lui B şi aşa mai departe; dacă urmăriţi cu atenţie cum s-au format elementele lui $A\cdot B$, sigur veţi înţelege.

Pentru matricele pătratice este adevărată relaţia

$$\boxed{A\cdot I_n = I_n\cdot A = A}$$

Dacă A şi B sunt două matrice pătratice de ordin n, astfel încât

$$A\cdot B = B\cdot A = I_n,$$

atunci B se numeşte inversa matricei A şi se notează cu A^{-1}.

Având numai aceste cunoştinţe putem deja rezolva o serie de probleme care apar în Subiectul II.

Exerciţiile sunt luate tot din variantele propuse de către Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009.

Ex. 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X^2=-I_2\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

a) Să se verifice că $A\in G$.

b) Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

c) Să se demonstreze că orice matrice pătratică M de ordinul al doilea, cu elemente numere reale, pentru care avem $A\cdot M=M\cdot A$, este de forma $M=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

Soluţie. a) Pentru a rezolva prima cerinţă a problemei trebuie calculat A^2 şi văzut dacă obţinem $-I_2$, adică $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aşa cum se spune în enunţ, $A^2=A\cdot A$. Să calculăm folosind schema de mai sus.

$$
\begin{array}{c|c}
\times & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\cdot 0+1\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot 0 \\ -1\cdot 0+0\cdot(-1) & -1\cdot 1+0\cdot 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Aşadar, $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I_2$.

b) Pentru rezolvarea acestei cerinţe nu este necesar să scriem o matrice X, să o adunăm cu I_2 şi apoi să ridicăm la puterea a doua.

Având în vedere semnificaţia puterii a doua putem scrie

$$\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)=\frac{1}{4}(X^2+X\cdot I_2+I_2\cdot X+I_2^2)$$

Având în vedere că $X\in G$ avem $X^2=-I_2$. Pe de altă parte $X\cdot I_2=I_2\cdot X=X$ (I_2 este element neutru pentru înmulţirea matricelor). De asemenea, $I_2^2=I_2$.

Având în vedere cele de mai sus, putem scrie

$$\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{4}(-I_2+X+X+I_2)=\frac{1}{4}\cdot 2X=\frac{1}{2}X.$$

Această cerinţă se putea rezolva şi altfel. Cunoaşteţi, încă din clasa a VII-a, formula $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Această formulă se aplică şi pentru două matrice X şi Y dacă $X\cdot Y=Y\cdot X$ (de regulă $X\cdot Y\neq Y\cdot X$). În cazul nostru $X\cdot I_2=I_2\cdot X=X$, şi atunci

$$\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{4}(X^2+2X+I_2),$$

iar în continuare procedăm ca mai sus.

c) Atenţie! De regulă, la o astfel de cerinţă se greşeşte deoarece mulţi elevi consideră $M=\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$ şi verifică relaţia $A\cdot M=M\cdot A$. Trebuie de fapt să procedăm invers; să luăm o matrice $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ şi să arătăm că dacă $A\cdot M=M\cdot A$, atunci $a=d$ (pe a îl vom nota x) şi $b=-c$ (pe b îl vom nota y).

Fie $M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Calculăm $A\cdot M$

$$\begin{array}{c|c} \times & \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot b+1\cdot d\\ -1\cdot a+0\cdot c & -1\cdot b+0\cdot d\end{pmatrix}\end{array}$$

Avem deci $A\cdot M=\begin{pmatrix} c & d\\ -a & -b\end{pmatrix}$.

Calculăm $M\cdot A$

$$\begin{array}{c|c} \times & \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a\cdot 0+b\cdot(-1) & a\cdot 1+b\cdot 0\\ c\cdot 0+d\cdot(-1) & c\cdot 1+d\cdot 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Avem deci $M\cdot A=\begin{pmatrix} -b & a\\ -d & c\end{pmatrix}$.

Trebuie să avem $A\cdot M=M\cdot A$, adică $\begin{pmatrix} c & d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & a\\ -d & c\end{pmatrix}$.

Două matrice sunt egale dacă elementele lor sunt respectiv egale.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n}\end{pmatrix}\Leftrightarrow a_{i,j}=b_{i,j},\ 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n.}$$

Aşadar, $\begin{cases} c=-b \\ d=a \\ -a=-d \\ -b=c \end{cases}$, ceea ce înseamnă $a=d=x$ şi $b=y$, iar $c=-y$.

În concluzie, $M=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

Ex. 2. Fie matricele $A_x=\begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$, şi mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se verifice că $I_3\in G$, unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

Soluţie. a) Este suficient să găsim o valoare a lui x astfel încât în loc de $a_{1,1}=2009^x$ să obţinem 1, iar în loc de $a_{3,2}=x$ să obţinem 0.

Din cele de mai sus este evident că pentru $x=0$ obţinem

$$A_0=\begin{pmatrix} 2009^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3.$$

Aşadar $I_3\in G$.

b) $A_x=\begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, iar $A_y=\begin{pmatrix} 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}$. Calculăm

$$A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2009^x\cdot 2009^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2009^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix}=A_{x+y}.$$

c) Pentru a putea răspunde la această cerinţă trebuie să ştim ce înseamnă "a fi grup". Chiar dacă nu face obiectul articolului de faţă vom aminti definiţia grupului.

O mulţime G, înzestrată cu o operaţie $*$, se numeşte grup dacă:

1. G este parte stabilă în raport cu operaţia $*$

$$\boxed{\text{Pentru orice } x,y\in G \text{ avem } x*y\in G}$$

2. Operaţia $*$ este asociativă

$$\boxed{\text{Pentru orice } x,y,z\in G \text{ avem } (x*y)*z=x*(y*z)}$$

3. Operaţia $*$ are un element neutru

$$\boxed{\text{Există } e\in G \text{ astfel încât } x*e=e*x=x, \text{ pentru orice } x\in G}$$

4. Orice element din G are un simetric în raport cu operaţia $*$

$$\boxed{\text{Pentru orice } x\in G \text{ există } x'\in G \text{ astfel încât } x*x'=x'*x=e}$$

Dacă operaţia $*$ este şi comutativă

$$\boxed{\text{Pentru orice } x, y \in G \text{ avem } x * y = y * x}$$

atunci spunem că grupul este comutativ, sau abelian.[2]

Ne întoarcem acum la rezolvarea punctului c).

Faptul că G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor rezultă din punctul b) al problemei.

Dacă $A_x, A_y \in G$, atunci, din b), avem $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, care este element al lui G.

Pentru asociativitate este suficient să spunem "în general, înmulţirea matricelor este asociativă" (s-a demonstrat cândva în clasa a XI-a).

Aşadar, în general, înmulţirea matricelor este asociativă.

Dacă ţinem neapărat, putem şi demonstra; este foarte simplu. Trebuie arătat că

$$(A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_x \cdot (A_y \cdot A_z)\,.$$

Avem $(A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_{x+y} \cdot A_z = A_{(x+y)+z}$ şi $A_x \cdot (A_y \cdot A_z) = A_x \cdot A_{y+z} = A_{x+(y+z)}$. Cum $(x+y)+z = x+(y+z)$ (sunt numere reale), avem $A_{(x+y)+z} = A_{x+(y+z)}$, ceea ce justifică asociativitatea.

Elementul neutru există; este I_3 despre care am arătat că aparţine lui G la punctul a).

Trebuie arătat că orice element are un simetric.

Vom folosi din nou punctele a) şi b) din problemă.

Notăm simetricul lui A_x cu $A_{x'}$. Trebuie să avem

$$A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = I_3.$$

Cum $I_3 = A_0$ şi $A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_{x+x'}$, va trebui să avem

$$x + x' = 0,$$

de unde

$$x' = -x.$$

Aşadar, orice element A_x din G are un simetric A_{-x}, care este în G.

Am verificat cele patru proprietăţi, deci G este grup în raport cu înmulţirea matricelor.

*

* *

O noţiune importantă care apare în Subiectul II al examenului de bacalaureat este cea de determinant.

Determinantul este un număr pe care îl putem asocia unei matrice pătratice.

Matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ îi asociem numărul $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Matricei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ îi asociem numărul $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Să vedem cum aflăm concret numărul $\det(A)$.

Pentru determinantul de ordin 2 (cel asociat matricei de ordin 2) avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

[2] După numele matematicianului norvegian Niels Henrik Abel (1802 – 1829).

Pentru determinantul de ordin 3 (cel asociat matricei de ordin 3) avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = a\cdot e\cdot i + d\cdot h\cdot c + g\cdot b\cdot f - c\cdot e\cdot g - f\cdot h\cdot a - i\cdot b\cdot d$$

Regula de mai sus, pentru a calcula un determinant de ordinul 3, este cunoscută sub numele de "regula lui Sarrus". Urmăriţi cu atenţie cele două linii scrise cu roşu şi apoi modul de calcul!

Există şi alte reguli de calcul; regula triunghiului, dezvoltarea după minori. Pentru moment este suficient să cunoaştem această regulă.

Să rezolvăm împreună câteva exerciţii, şi în măsura în care este necesar, să completăm cu noţiuni teoretice.

Ex. 3. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Ştiind că $a = -1,\ b = 0$ şi $c = 1$, să se calculeze determinantul Δ.

b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),\ (\forall)\ a, b, c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$.

Soluţie. a) Înlocuind pe a, b şi c avem $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot$ $(-1) + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 0\cdot 1 = -1+1+0+0+0+0 = 0.$

b) Îmi cer scuze! Nu ştiu să rezolv acest punct, dar folosind rezultatul de la b), îl voi rezolva pe c).

c) Determinantul de la punctul c) seamănă cu determinantul Δ. E suficient să punem în loc de a pe 2^x, iar în loc de b şi c pe 1.

Avem $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = (2^x+1+1)\left((2^x)^2+1^2+1^2-2^x\cdot 1-1\cdot 1-1\cdot 2^x\right) = (2^x+2)(2^{2x}-2\cdot 2^x+1) =$ $(2^x+2)(2^x-1)^2$ (Am folosit rezultatul de la punctul b).

Trebuie să rezolvăm aşadar ecuaţia

$$(2^x+2)(2^x-1)^2 = 0.$$

Un produs este 0 dacă cel puţin un factor este 0.

Cum $2^x > 0$, evident $2^x + 2 \neq 0$. Rămâne $(2^x-1)^2 = 0$, sau $2^x - 1 = 0$, de unde $2^x = 1$ şi deci $x = 0$.

În timp ce rezolvam punctul c) mi-am amintit cum se poate rezolva punctul b). Am chiar două soluţii, una muncitorească, alta elegantă.

b) (muncitoreşte) Calculăm cu regula lui Sarrus determinantul Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + c^3 + b^3 - cab - bca - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Rezultatul obţinut nu este cel aşteptat, dar tot primesc ceva puncte.

Acum, iau rezultatul la care trebuie să ajung, fac calculele, şi dacă ajung la $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ înseamnă că egalitatea este demonstrată.

Să trecem la treabă.

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-abc-b^2c+a^2c+b^2c+c^3-abc-ac^2-bc^2 = a^3+b^3+c^3-3abc$ (şi am terminat).

b) (elegant) Trebuie să cunoaştem câteva proprietăţi ale determinanţilor.

1. Valoarea unui determinant nu se modifică dacă la elementele unei linii (coloane) se adună elementele altei linii (coloane), chiar înmulţite cu un acelaşi număr nenul.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\alpha\cdot d & b+\alpha\cdot e & c+\alpha\cdot f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

2. Înmulţirea unui determinant cu un număr se face înmulţind elementele unei linii (coloane) cu acel număr.

$$\boxed{\alpha\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\cdot a & \alpha\cdot b & \alpha\cdot c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

3. Valoarea unui determinant care sub (deasupra) diagonalei principale are numai 0 este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot e\cdot i}$$

Mai sunt şi alte proprietăţi, dar deocamdată acestea sunt suficiente. Trecem la rezolvare.

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} =$ (proprietatea 1) $\begin{vmatrix} a+c+b & a+b+c & a+b+c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} =$ (proprietatea 2) $(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (ultimul determinant se calculează uşor cu regula lui Sarrus.)

Ex. 4. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2 + I_2^t$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $m \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $(mA)^t = mA^t$.

c) Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A + A^t = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pentru o matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, matricea transpusă este $A^t = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$.

Liniile au devenit coloane şi coloanele au devenit linii.

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $I_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $I_2 + I_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; atunci $mA = \begin{pmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{pmatrix}$.

Rezultă $(mA)^t = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}$ (1)

Pe de altă parte $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şi atunci $mA^t = \begin{pmatrix} ma & mc \\ mb & md \end{pmatrix}$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă $(mA)^t = mA^t$.

c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Cu aceasta, relaţia din enunţ devine

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sau

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Din egalitatea a două matrice obţinem $\begin{cases} 2a = 0 \\ b+c=0 \\ 2d=0 \end{cases}$, de unde $a = d = 0$ şi $b = -c$.

Aşadar, $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 5. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, şi $B = A - I_3$.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Să se calculeze $A^2 - B^2$, unde $A^2 = A \cdot A$ şi $B^2 = B \cdot B$.

c) Să se arate că inversa matricei B este $B' = \frac{1}{9}A - I_3$.

Soluţie: Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -18 - 18 - 18 + 18 + 18 + 18 = 0.$

Puteam scrie direct $\det(A) = 0$, dacă ştiam o proprietate a determinanţilor:

Valoarea unui determinant care are două linii (coloane) egale sau proporţionale este egală cu 0.

b) Avem $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 30 \\ -20 & 20 & 60 \\ -30 & 30 & 90 \end{pmatrix}$.

Din enunţ $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$,

şi atunci $B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 24 \\ -16 & 17 & 48 \\ -24 & 24 & 73 \end{pmatrix}$.

De aici $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 12 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$.

Problema se poate rezolva şi altfel. Dacă două matrice A şi B comută (adică este adevărată relaţia $A \cdot B = B \cdot A$), atunci formula $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ rămâne adevărată (şi pentru matrice).

Dar $A \cdot B = A \cdot (A - I_3) = A^2 - A$, iar $BA = (A - I_3) \cdot A = A^2 - A$, ceea ce arată că $A \cdot B = B \cdot A$, aşadar se poate aplica formula.

Avem $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

Din $B = A - I_3$ deducem că $A - B = I_3$, atunci $A^2 - B^2 = I_3 \cdot (A + B) = A + B = A + A - I_3 = 2A - I_3$.

Aşadar,

$$A^2 - B^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & 12 \\ -6 & 6 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 12 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Surprinzător, am obţinut acelaşi răspuns!

c) Folosim definiţia inversei prezentată mai sus; calculăm aşadar $B \cdot B'$ şi $B' \cdot B$, iar rezultatul trebuie să fie în ambele cazuri I_3. Acest calcul este posibil de făcut pentru că ni se spune care ar trebui să fie inversa lui B.

Avem $B \cdot B' = (A - I_3)\left(\frac{1}{9}A - I_3\right) = \frac{1}{9}A^2 - A - \frac{1}{9}A + I_3 = \frac{1}{9}A^2 - \frac{10}{9}A + I_3$.

Din punctul b) avem $A^2 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 30 \\ -20 & 20 & 60 \\ -30 & 30 & 90 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 10A$.

Revenind, putem scrie $B \cdot B' = \frac{10}{9}A - \frac{10}{9}A + I_3 = I_3$.

Analog, $B' \cdot B = \left(\frac{1}{9}A - I_3\right)(A - I_3) = \frac{1}{9}A^2 - \frac{1}{9}A - A + I_3 = \frac{1}{9}A^2 - \frac{10}{9}A + I_3 = \frac{10}{9}A - \frac{10}{9}A + I_3 = I_3$.

În legătură cu inversa unei matrice, în subiectele de bacalaureat mai apar probleme în care se cere "să se arate că matricea A are inversă", fără a fi necesar să o şi calculăm. În acest caz folosim următorul rezultat:

O matrice pătratică A este inversabilă (are inversă, este nesingulară) dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$.

Acest lucru ne permite (în principiu) să evităm unul dintre calculele de mai sus; într-adevăr, odată ce am calculat $B \cdot B' = I_3$, acest lucru ne arată că $\det(B) \neq 0$, deci B este inversabilă, şi atunci avem $B^{-1} = B^{-1}(B \cdot B') = B'$.

Dacă problema cere să găsim noi inversa, atunci chiar că suntem încolţiţi! Trebuie să ştim despre minorii unui element, matricea transpusă, şi matricea adjunctă. Având în vedere numărul redus de cerinţe de acest fel, nu insistăm. Dacă ţineţi neapărat, adăugaţi un comentariu, şi vom reveni.