

Aplicații ale trigonometriei în geometrie

Aplicații

1) Să se calculeze $\sin A$, știind că în triunghiul ABC se cunosc $AB = 4, BC = 2$ și $m(\hat{C}) = 60^\circ$.

Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ și cum se cunosc

$$BC = a = 2, AB = c = 4 \text{ și } m(\hat{C}) = 60^\circ,$$

rezultă $\frac{2}{\sin A} = \frac{4}{\sin 60^\circ}$ și dacă

$$4 \sin A = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ de unde}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2) Să se calculeze $\sin A$, știind că în triunghiul ABC se cunosc latura $BC = 10$ și raza cercului circumscris egală cu 10.

Din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = 2R$, deci

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}, \text{ deci}$$

$$m(\hat{A}) = 30^\circ.$$

3) Să se calculeze lungimea laturii AC a triunghiului ABC știind că $m(\hat{B}) = 45^\circ, m(\hat{C}) = 30^\circ$ și $AB = 10$.

Din teorema sinusurilor :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Avem $AB = c = 10, \sin B = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin C = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ și deci

$$b = AC = \frac{c \sin B}{\sin C} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 10\sqrt{2}.$$

4) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că $m(\hat{A}) = 30^\circ$ și raza cercului circumscris triunghiului este egală cu 4.

Din $\frac{a}{\sin A} = 2R$ rezultă

$$a = 2R \sin A, \text{ deci}$$

$$BC = 2 \cdot 4 \sin 30^0 = 4.$$

5) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC știind că $BC = 20$ și $m(\hat{A}) = 60^0$.

$$\text{Din } \frac{a}{\sin A} = 2R \text{ rezultă}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A}, \text{ adică}$$

$$R = \frac{20}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ și deci}$$

$$R = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

6) În triunghiul ABC se cunosc $AB = AC = 6$ și $BC = 6\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos B$.

$$\text{Avem } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \text{ din teorema cosinusurilor.}$$

$$\text{Rezultă } \cos B = \frac{36 + 36 \cdot 3 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{36 \cdot 3}{2 \cdot 36\sqrt{3}}, \text{ adică}$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și}$$

$$m(\hat{B}) = 30^0.$$

7) Să se determine lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AC = 6, AB = 4$ și $m(\hat{A}) = 60^0$.

Din teorema cosinusurilor

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ și cum}$$

$$AC = b = 6, AB = c = 4, \text{ avem}$$

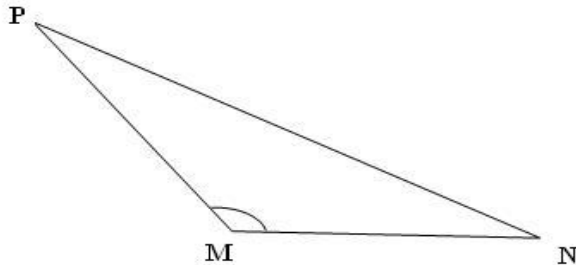
$$\cos 60^0 = \frac{36 + 16 - a^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} \text{ și}$$

$$a^2 = 52 - 48 \cdot \frac{1}{2}, \text{ deci}$$

$$a^2 = 28, \text{ rezultă}$$

$$a = 2\sqrt{7}.$$

8) Calculați perimetrul triunghiului MNP , știind că $MN = 2$, $MP = 3$ și $\widehat{MNP} = 120^\circ$.



Perimetrul este egal cu suma lungimilor laturilor triunghiului.

Din teorema cosinusurilor

$$\cos M = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN \cdot MP}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} NP^2 &= 4 + 9 - 12 \cos 120^\circ, \\ \cos 120^\circ &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = \\ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \text{ și deci} \\ NP^2 &= 13 + 6. \end{aligned}$$

Avem $NP = \sqrt{19}$ și $MN + MP + NP = 5 + \sqrt{19}$.

9) Să se calculeze aria triunghiului MNP dacă $MN = MP = 6$ și $m(\widehat{PMN}) = 120^\circ$.

Avem

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin \widehat{PMN} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sin 120^\circ = 18 \sin(180^\circ - 60^\circ) = 18 \sin 60^\circ = \\ &= 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}. \end{aligned}$$

10) Aflați aria triunghiului MNP dacă $MN = 6$, $NP = 4$ și $m(\widehat{MNP}) = 45^\circ$.

Avem $S = \frac{1}{2} MN \cdot NP \cdot \sin \widehat{MNP} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \sin 45^\circ$ și deci

$$S = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

11) Să se calculeze lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC , știind că $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$.

Observăm că $AB^2 + AC^2 = BC^2$ și deci triunghiul ABC este dreptunghic în A .

Rezultă $S = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{BC \cdot h_a}{2}$ și deci

$$6 = \frac{5 \cdot h_a}{2}, \text{ de unde rezultă}$$

$$h_a = \frac{12}{5}.$$

12) Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 30^\circ$ și $AB = 4\sqrt{3}$.

Triunghiul este dreptunghic în A și $m(\hat{B}) = 30^\circ$ și deci cateta AC care se opune unghiului de 30° este egală cu $\frac{BC}{2}$.

Din teorema lui Pitagora

$$AB^2 + AC^2 = BC^2, \text{ deci}$$

$$48 + \frac{BC^2}{4} = BC^2 \text{ sau}$$

$$4 \cdot 48 = 3BC^2, \text{ de unde}$$

$$BC = 8.$$

13) Să se calculeze lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu aria egală cu 18 și măsura unui unghi 45° .

Un triunghi dreptunghic cu un unghi 45° este isoscel, deci cele 2 catete au aceeași lungime. Cum aria triunghiului este egală cu semiprodusul catetelor, rezultă că, dacă notăm

$$AB = AC = c, \text{ rezultă că}$$

$$\frac{1}{2}c^2 = 18, \text{ deci}$$

$$c^2 = 36 \text{ și}$$

$$c = 6.$$

14) Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ are loc $AD^2 = AB \cdot AC \cdot \sin A \cdot \sin C$, unde D este piciorul înălțimii din A .

Folosind definițiile funcțiilor trigonometrice în triunghiul dreptunghic avem că sinusul unui unghi ascuțit este raportul dintre cateta opusă și ipotenuză.

Aplicând în triunghiurile dreptunghice DAB și DAC avem

$$\sin B = \frac{AD}{AB} \text{ și}$$

$$\sin C = \frac{AD}{AC}.$$

Înmulțind cele 2 relații membru cu membru rezultă $AB \cdot AC \cdot \sin A \cdot \sin C = AD^2$.

15) Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB = 8, BC = 10$ și $m(\widehat{BCD}) = 150^\circ$.

Aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului ABC . Într-un paralelogram unghiurile alăturate sunt suplementare și deci $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$. Rezultă că aria cerută este

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = 80 \sin 30^\circ = 40.$$

16) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul cu lungimile laturilor de 13, 14, 15.

Avem $r = \frac{S}{p}$, unde S este aria triunghiului și p semiperimetrul.

$$\text{Cum } p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21,$$

$$p - a = 21 - 13 = 8, p - b = 21 - 14 = 7 \text{ și}$$

$$p - c = 21 - 15 = 6.$$

Din formula lui Heron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 16} = 3 \cdot 7 \cdot 4 \quad \text{și} \quad r = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4}{21} = 4.$$

17) Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi cu lungimile laturilor 5, 7 și 8.

$$\text{Vom folosi } R = \frac{abc}{4S}.$$

Calculăm S folosind formula lui Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \text{ Rezultă}$$

$$S = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3} \text{ și deci}$$

$$r = \frac{5 \cdot 7 \cdot 8}{10\sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{3}.$$