Ecuația de gradul II

Aplicații

1) Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$

Avem condițiile $x \neq -2$, $x \neq -3$ şi eliminând numitorii

$6(\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+3+\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+4)=7(\mathrm{x}^2+5\mathrm{x}+6)$ şi după reducerea termenilor asemenea obținem

$5x^2+13x=0$, adică

$x(5x+13)=0$ şi

$x_1=0$, $x_2=-\frac{13}{5}$.

b) $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$

Avem condițiile

$x \neq \pm 2$ şi $2x^2-x-6=x^2+x-2$, adică

$x^2-2x-4=0$ şi

$x_{1,2}=\frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2}$ adică

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{5}$.

2) Dați exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care să aibă o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$.

Avem

$x_1 = \sqrt{3}$ şi vom considera la întâmplare, de exemplu $x_2 = 2$.

Avem

$S = 2 + \sqrt{3}$, $P = 2\sqrt{3}$ şi ecuația

$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

are o rădăcină egală cu $\sqrt{3}$.

3) Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + 5x - 7 = 0$. Arătați că ${x_1}^3 + {x_2}^3 \in Z$.

Din relațiile lui Viete:
$x_1 + x_2 = -5$ şi

$x_1 x_2 = -7$, adică

$S \in Z, P \in Z$.

$${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS = (-5)^3 - 3(-5)(-7) \in Z$$

4) Determinați m∈ R pentru care ecuația:

$(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$, are rădăcini reale.

Dacă $m = 3$, ecuația devine

$15 - 10x = 0$ cu soluție $x = \frac{3}{2}$.
Dacă $m \neq 3$, ecuația de gradul al doilea are rădăcini reale dacă $\Delta \geq 0$.

Avem deci condiția:

$4(3m - 4)^2 - 4(m - 3)(m - 6) \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 \geq 0$ şi deci

$$m \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{3\}$$

Deci valorile cerute sunt: $m \in (-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

5) Se consideră ecuația $x^2 + mx + 2 = 0$ cu soluțiile x_1 şi x_2. Aflați $m \in R$ pentru care ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 5$.

Folosim relațiile lui Viete şi avem

$x_1 + x_2 = -m$, $x_1 x_2 = 2$ şi cum

${x_1}^2 + {x_2}^2$=$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ avem

$m^2 - 4 = 5$ şi deci

$m = \pm 3$.

6) Determinați m∈ R^* astfel încât ecuația $x^2 - 3x + m = 0$ să aibă rădăcini reale de semne opuse.

Avem condițiile $\Delta > 0$ şi $P < 0$ adică $9 - 4m > 0$ şi $m < 0$, deci $m < \frac{9}{4}$ şi $m < 0$. Soluție $m < 0$.

7) Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Formăm ecuația $t^2 - 5t + 6 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, deci sistemul are soluțiile (2,3) şi (3,2).