Funcția de gradul II

Aplicații

1) Să se determine valoarea minimă a funcției $f: R \to R, f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.

Avem $a = 4 > 0$, deci f are minim care se atinge pentru

$x_V = -\frac{b}{2a}$, adică

$x_V = \frac{8}{2 \cdot 4} = 1$.

$f_{min} = y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ sau

$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -3$.

2) Aflați valoarea maximă a funcției $f: R \to R, f(x) = -2x^2 + x$.

Avem $a = -2 < 0$, deci f admite maxim pentru

$x_V = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ şi

$f_{max} = y_V = f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

3) Ordonați crescător $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ și $f(\sqrt{\pi})$ dacă $f: R \to R, f(x) = 6x - 3x^2$.

Avem $a = -3 < 0$, deci f admite maxim şi este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-6} = 1.$$

Cum $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{\pi}$ şi funcția este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$, avem

$f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{\pi})$.

4) Determinați imaginea funcției $f: R \to R, f(x) = x^2 - x + 2$.

Avem $a = 1 > 0$, deci

$Im\, f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$.

Cum $\Delta = -7$, rezultă

$Im\ f = \left[\frac{7}{4}, \infty\right).$

5) Fie $f: R \to R, f(x) = x^2 + (m+1)x + m, m \in R$. Determinați m pentru care parabola asociată funcției este tangentă la axa Ox.

Grficul este tangent la Ox dacă $\Delta = 0$, adică

$(m+1)^2 - 4m = 0$, adică

$(m-1)^2 = 0$, deci

$m = 1$.

6) Determinați $a \in R\backslash\{-1\}$ pentru care axa Ox intersectează graficul funcției $f: R \to R, f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$ în 2 puncte distincte.

Axa Ox intersectează graficul funcției în 2 puncte distincte dacă ecuația

$f(x) = 0$ are 2 rădăcini reale distincte, adică $\Delta > 0$.

Avem

$\Delta = 5a^2 - 18a + 13$ cu rădăcinile

$a_1 = 1, a_2 = \frac{13}{5}$ și deci

$\Delta > 0$ pentru $a \in (-1,\ \infty) \cup \left(\frac{13}{5}, \infty\right)$.

7) Se consideră $f: R \to R, f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$. Să se determine valorile lui $m \in R^*$ astfel încât $f(x) > 0$ pentru orice $x \in R$.

Funcția de gradul II păstrează semnul constant și anume semnul lui a dacă $\Delta < 0$. Se impun deci condițiile $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$.

Avem $\Delta = 1 - m$ și deci

$\begin{cases} m > 1 \\ m > 0 \end{cases}$, de unde în final $m \in 1, \infty)$.

8) Determinați $m \in R^*$ dacă $\frac{mx^2 + x - 2}{x^2 + 1} \leq 0$, oricare ar fi $x \in R$.

Deoarece $x^2 + 1 > 0$ pentru orice $x \in R$, inecuația dată eset echivalentă cu

$$mx^2 + x - 2 \leq 0,$$

oricare ar fi $x \in R$, şi avem condiţiile $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$, adică

$\begin{cases} m < 0 \\ 1 + 8m \leq 0 \end{cases}$ şi deci $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

9) Să se determine imaginea funcţiei $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1}$.

Cum $Im\ f = \{y \in R | \exists x \in R\ a.\hat{i}.\ f(x) = y\}$,

punem $f(x) = y$.

Rezultă $x^2 - x + 2 = yx^2 + y$, adică

$x^2(1 - y) - x + 2 - y = 0$,

şi determinăm valorile lui y pentru care ecuaţia în x are rădăcini reale.

Avem condiţia $\Delta \geq 0$, adică

$-4y^2 + 12y - 7 \geq 0$ şi

$y \in \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Deci $Im\ f = \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

10) Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x = 2$ este axă de simetrie pentru parabola $y = x^2 + mx + 4$.

Axa de simetrie a parabolei este

$x = -\frac{b}{2a}$.

Avem deci

$x = -\frac{m}{2}$, de unde

$-\frac{m}{2} = 2$ şi $m = -4$.

11) Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2x$ şi $g: R \to R, g(x) = -x - 2$.

Coordonatele punctelor de intersecţie ale graficelor a 2 funcţii sunt soluţiile sistemului format din ecuaţiile graficelor.

Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases},$$

$x^2 + 2x = -x - 2$ sau

$x^2 + 3x + 2 = 0$

cu $x_1 = -1$ şi $x_2 = -2$, deci

$y_1 = -1, y_2 = 0$ şi

punctele de intersecție au coordonatele $(-1, -1)$, respectiv $(-2, 0)$.

12) Punctul $V(2, 3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f: R \to R, f(x) = x^2 + px + q$. Calculați $f(3)$.

Avem $x_V = -\frac{b}{2a}$ şi

$y_V = f(x_V)$.

Cum $x_V = 2$, rezultă

$\frac{-p}{2} = 2$, deci

$p = -4$ şi

$f(x) = x^2 - 4x + q$.

Din $f(2) = 3$ avem

$4 - 8 + q = 3$, deci

$q = 7$ şi

$f(x) = x^2 - 4x + 7$, de unde

$f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$.