Progresii

Progresiile sunt şiruri definite printr-o relație de recurență, adică o relație care permite calcularea fiecărui termen al şirului în funcție de termenii anteriori.

Se numeşte *şir de numere reale* o funcție $f: N^* \to R$.

Pentru fiecare $n \in N^*$ notăm $f(n) = a_n$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se numesc *termenii* şirului.Şirul astfel definit se notează $(a_n)_{n\geq 1}$ sau $(a_n)_{n\in N^*}$.

I. Progresii aritmetice

- Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ este *progresie aritmetică* dacă există un număr real r astfel încât pentru orice

  $$n \geq 1, a_{n+1} = a_n + r$$

  Numărul r se numeşte *rația* progresiei.

  Rezultă că numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sunt în progresie aritmetică dacă

  $$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1}$$

- Avem succesiv:

  $$a_2 = a_1 + r;$$

  $$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;$$

  $$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

  şi, prin inducție,

  $$\boxed{a_n = a_1 + r(n-1)}.$$

- Caracterizarea progresiei aritmetice este dată de următoarea teoremă:
  Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă şi numai dacă pentru orice

  $$n \geq 2, a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

- Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este:

  $$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}},$$

  care se mai poate scrie, înlocuind

$$a_n = a_1 + r(n-1),$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + r(n-1))}{2}$$

Observații:

1) Pentru a arăta că un şir este progresie aritmetică fie arătăm că diferența oricăror 2 termeni consecutivi este constantă, fie ca pentru orice
$$n \geq 2, a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

2) Dacă cunoaştem S_n, atunci pentru $n = 1$ rezultă

$S_1 = a_1,$

iar pentru $n \geq 2$ rezultă

$a_n = S_n - S_{n-1}.$