Funcția de gradul II

$f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Graficul funcției de gradul II se numeşte *parabolă*.

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ se numeşte *vârful* parabolei.

- Dacă $a > 0$, V este punct de minim şi $Im\ f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$, funcția fiind strict descrecătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.
- Dacă $a < 0, V$ este punct de maxim şi $Im\ f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, funcția fiind strict crecătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

  Observații: 1) $Im\ f = \{y \epsilon R \mid \exists x \epsilon R\ a.î. f(x) = y.\}$

  2) Avem $x_V = -\frac{b}{2a}$ şi $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ sau $y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

- Graficul funcției de gradul II are dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ ca axă de simetrie, adică $f\left(x - \frac{b}{2a}\right) = f\left(x + \frac{b}{2a}\right), \forall x \in R$.
- Graficul funcției intersectează Oy în $(0, c)$.
- Dacă $\Delta > 0$, graficul funcției intersectează axa Ox în 2 puncte distincte: $(x_1, 0)$ şi $(x_2, 0)$.
- Dacă $\Delta = 0$, graficul funcției este tangent axei Ox.
- Dacă $\Delta < 0$, graficul funcției nu intersectează axa Ox.
- Semnul funcției de gradul II este dat de semnul lui Δ şi semnul lui a.

  Avem cazurile:

  1) $\Delta \leq 0$, funcția păstrează semn constant pentru orice $x \in R$, şi anume semnul lui a.

  2) Dacă $\Delta > 0$, atunci funcția de gradul II are semn contrar lui a între rădăcini ți semnul lui a în afara rădăcinilor.

Aplicații

1) Să se determine valoarea minimă a funcției $f: R \to R, f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.

Avem $a = 4 > 0$, deci f are minim care se atinge pentru

$x_V = -\frac{b}{2a}$, adică

$x_V = \frac{8}{2\cdot 4} = 1$.

$f_{min} = y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ sau

$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(1) = -3$.

2) Aflați valoarea maximă a funcției $f: R \to R, f(x) = -2x^2 + x$.

Avem $a = -2 < 0$, deci f admite maxim pentru

$x_V = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$ şi

$f_{max} = y_V = f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

3) Ordonați crescător $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ şi $f(\sqrt{\pi})$ dacă $f: R \to R, f(x) = 6x - 3x^2$.

Avem $a = -3 < 0$, deci f admite maxim şi este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-6} = 1.$$

Cum $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{\pi}$ şi funcția este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$, avem

$f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{\pi})$.

4) Determinați imaginea funcției $f: R \to R, f(x) = x^2 - x + 2$.

Avem $a = 1 > 0$, deci

$Im\ f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$.

Cum $\Delta = -7$, rezultă

$Im\ f = \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$.

5) Fie $f: R \to R, f(x) = x^2 + (m+1)x + m, m \in R$. Determinați m pentru care parabola asociată funcției este tangentă la axa Ox.

Grficul este tangent la Ox dacă $\Delta = 0$, adică

$(m+1)^2 - 4m = 0$, adică

$(m-1)^2 = 0$, deci

$m = 1$.

6) Determinați $a \in R \setminus \{-1\}$ pentru care axa Ox intersectează graficul funcției $f: R \to R, f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$ în 2 puncte distincte.

Axa Ox intersectează graficul funcției în 2 puncte distincte dacă ecuația

$f(x) = 0$ are 2 rădăcini reale distincte, adică $\Delta > 0$.

Avem

$\Delta = 5a^2 - 18a + 13$ cu rădăcinile

$a_1 = 1, a_2 = \frac{13}{5}$ și deci

$\Delta > 0$ pentru $a \in (-1, \ \infty) \cup \left(\frac{13}{5}, \infty\right)$.

7) Se consideră $f: R \to R, f(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$. Să se determine valorile lui $m \in R^*$ astfel încât $f(x) > 0$ pentru orice $x \in R$.

Funcția de gradul II păstrează semnul constant și anume semnul lui a dacă $\Delta < 0$. Se impun deci condițiile $\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$.

Avem $\Delta = 1 - m$ și deci

$\begin{cases} m > 1 \\ m > 0 \end{cases}$, de unde în final $m \in 1, \infty)$.

8) Determinați $m \in R^*$ dacă $\frac{mx^2 + x - 2}{x^2 + 1} \leq 0$, oricare ar fi $x \in R$.

Deoarece $x^2 + 1 > 0$ pentru orice $x \in R$, inecuația dată eset echivalentă cu

$$mx^2 + x - 2 \leq 0,$$

oricare ar fi $x \in R$, și avem condițiile $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$, adică

$\begin{cases} m < 0 \\ 1 + 8m \leq 0 \end{cases}$ şi deci $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

9) Să se determine imaginea funcției $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2+1}$.

Cum $Im\, f = \{y \in R | \exists x \in R\ a.î.\ f(x) = y\}$,

punem $f(x) = y$.

Rezultă $x^2 - x + 2 = yx^2 + y$, adică

$x^2(1-y) - x + 2 - y = 0$,

şi determinăm valorile lui y pentru care ecuația în x are rădăcini reale.

Avem condiția $\Delta \geq 0$, adică

$-4y^2 + 12y - 7 \geq 0$ şi

$y \in \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Deci $Im\, f = \left[\frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$.

10) Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x = 2$ este axă de simetrie pentru parabola $y = x^2 + mx + 4$.

Axa de simetrie a parabolei este

$x = -\frac{b}{2a}$.

Avem deci

$x = -\frac{m}{2}$, de unde

$-\frac{m}{2} = 2$ şi $m = -4$.

11) Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f: R \to R, f(x) = x^2 + 2x$ şi $g: R \to R, g(x) = -x - 2$.

Coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor a 2 funcții sunt soluțiile sistemului format din ecuațiile graficelor.

Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x - 2 \end{cases},$$

$x^2 + 2x = -x - 2$ sau

$x^2 + 3x + 2 = 0$

cu $x_1 = -1$ şi $x_2 = -2$, deci

$y_1 = -1, y_2 = 0$ şi

punctele de intersecție au coordonatele $(-1, -1)$, respectiv $(-2, 0)$.

12) Punctul $V(2, 3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f: R \to R, f(x) = x^2 + px + q$. Calculați $f(3)$.

Avem $x_V = -\frac{b}{2a}$ şi

$y_V = f(x_V)$.

Cum $x_V = 2$, rezultă

$\frac{-p}{2} = 2$, deci

$p = -4$ şi

$f(x) = x^2 - 4x + q$.

Din $f(2) = 3$ avem

$4 - 8 + q = 3$, deci

$q = 7$ şi

$f(x) = x^2 - 4x + 7$, de unde

$f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$.

Propunem spre rezolvare:

1) Determinați punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor $f: R \to R, f(x) = 2x - 1$ şi $g: R \to R, g(x) = x^2 - 2x + 3$.

2) Determinați $m \in R$ pentru care graficul funcției $f: R \to R, f(x) = x^2 - x + m^2$ este tangent la axa Ox.

3) Să se determine $m \in R$ astfel încât $x^2 - (m-3)x + m - 3 > 0$ pentru orice $x \in R$.

4) Determinați soluțiile întregi ale inecuației

$$(x-1)^2 + x - 7 < 0.$$

(Indicație: soluția inecuației se intersectează cu mulțimea numerelor întregi.)

5) Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se demonstreze că $f(x) \geq -1$, oricare ar fi numărul real x.

6) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $(x^2 - 1) \cdot (x + 1) \geq 0$.

(Indicație: inecuația se scrie $(x+1)^2(x-1) \geq 0$, de unde $x \in \{-1\} \cup [1, \infty).$)