Ecuaţii

(iraţionale, exponenţiale, logaritmice)

Autor: Ion Cicu

Abstract: Materialul îşi propune o abordare strict la nivelul cerinţelor necesare rezolvării problemelor care apar în subiectul I al examenului de bacalaureat, M2.

Pe parcursul materialului, comentariile autorului vor fi scrise cu culoare albastră, iar aspectele teoretice esenţiale cu roşu.

Ecuaţii iraţionale

Sunt ecuaţii în care necunoscuta apare sub radical.

Iată câteva exemple luate din variantele propuse de Centrului Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009:

$$\sqrt{x-5}=2$$

$$\sqrt{x+1}=5-x$$

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0$$

$$\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$$

În abordarea rezolvării unei astfel de probleme distingem două situaţii:

1. Indicele sau ordinul radicalului este 2 sau oricare alt număr par

În această situaţie, rezolvarea începe prin impunerea unor condiţii.

Pe de o parte sunt condiţii de existenţă a radicalilor de ordin par, pe de altă parte sunt condiţiile de compatibilitate (a avea sau nu soluţii) a ecuaţiei

Un radical de ordin par există (are sens, este definit) numai atunci când cantitatea aflată sub radical este mai mare sau egală cu 0.

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} \text{ are sens dacă } f(x)\geq 0.}$$

Valoarea unui radical de ordin par este totdeauna un număr mai mare sau egal cu 0.

$$\boxed{\text{Oricare ar fi numărul } a\geq 0, \text{ numărul } \sqrt[2k]{a}\geq 0.}$$

2. Indicele sau ordinul radicalului este 3 sau oricare alt număr impar

În această situaţie lucrurile sunt mult mai simple; nu avem nevoie de nicio condiţie.

După impunerea condiţiilor, aflarea soluţiilor (rezolvarea ecuaţiei) se face, în cele mai multe cazuri, prin ridicarea ecuaţiei, membru cu membru, la o putere care să permită eliminarea radicalului.

Ridicând un radical la o putere egală cu indicele acestuia, radicalul dispare.

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{A}\right)^n=A}$$

Să rezolvăm împreună exemplele de mai sus.

Ex.1 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-5} = 2$.

Soluţie: Ecuaţia conţine un radical de ordin 2 (ordinul 2 nu se mai scrie), aşadar trebuie impusă condiţia de existenţă a radicalului.

Avem condiţia de existenţă

$$x - 5 \geq 0$$

care conduce la

$$x \geq 5$$

sau

$$x \in [5, \infty)$$

Nu avem condiţii de compatibilitate deoarece radicalul este egal cu 2, care este clar un număr pozitiv Trecem la rezolvarea propriu-zisă.

Ridicăm ecuaţia la puterea a doua şi avem

$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2$$

de unde

$$x - 5 = 4$$

sau

$$x = 9$$

Ne asigurăm că 9 se află în intervalul $[5, \infty)$.

Soluţia ecuaţiei este 9.

Ex.2 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

Soluţie: Condiţia de existenţă a radicalului este

$$x + 1 \geq 0$$

care conduce la

$$x \geq -1$$

sau

$$x \in [-1, \infty) \qquad (1)$$

De această dată radicalul este egal cu o expresie $(5 - x)$ despre care nu avem certitudinea că este mai mare sau egală cu 0. Din acest motiv trebuie impusă condiţiia ca această expresie să fie mai mare sau egală cu 0. Aceasta este condiţiia de compatibilitate (a avea soluţie).

Avem, aşadar, condiţia de compatibilitate

$$5 - x \geq 0$$

de unde

$$-x \geq -5$$

Pentru a elimina semnul " $-$ " din faţa lui x ultima inegalitate trebuie înmulţită cu -1. În acest fel se schimbă sensul inegalităţii.

Înmulţind cu -1 obţinem

$$x \leq 5$$

sau

$$x \in (-\infty, 5] \qquad (2)$$

Condiţiile de existenţă şi compatibilitate trebuie verificate simultan, de aceea trebuie intersectate cele două intervale. Dacă nu le intersectăm va trebui, la sfârşit, să vedem care dintre soluţii verifică ambele condiţii.

Din (1) şi (2) avem

$$x \in [-1, \infty) \cap (-\infty, 5] = [-1, 5]$$

Trecem la rezolvarea propriu-zisă.

Ridicăm ecuaţia la puterea a doua şi avem

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (5-x)^2$$

sau

$$x + 1 = 25 - 10x + x^2$$

Ecuaţia obţinută se aduce la o ecuaţie de gradul al doilea prin trecerea termenilor într-un singur membru şi efectuarea calculelor

Din ecuaţia de mai sus obţinem

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

cu soluţiile $x_1 = 3$ şi $x_2 = 8$. (Soluţiile au fost obţinute cu formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, în care $a = 1$, $b = -11$, $c = 24$ şi $\Delta = b^2 - 4ac$.)

Stabilim care dintre cele două numere, 3 şi 8, se află în intervalul $[-1, 5]$

Cum numai 3 se află în intervalul $[-1, 5]$ numai acesta este soluţie a ecuaţiei iniţiale.

Ex.3 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0$.

Soluţie: Condiţiile de existenţă a radicalilor sunt:

$$x^2 - 4 \geq 0 \text{ şi } x - 2 \geq 0$$

Prima inecuaţie se rezolvă cu semnul funcţiei de gradul al doilea. Din $x^2 - 4 = 0$ obţinem $x_1 = 2$ şi $x_2 = -2$. Tabelul de semn este $\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 2 & & \infty \\ \hline x^2-4 & + + + + + + & & 0 & - - - - & 0 & + + + + & \end{array}$, de unde $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

Prima inecuaţie are soluţia $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, iar a doua $x \in [2, \infty)$.

Soluţia comună celor două inecuaţii este $x \in [2, \infty)$.

Trecem la rezolvarea propriu-zisă. Rezolvarea acestei ecuaţii o vom face altfel decât prin ridicare la puterea a doua.

Cei doi termeni din membrul drept sunt numere nenegative (mai mari sau egale cu 0). Suma lor ar trebui să fie 0. Acest lucru este posibil numai dacă fiecare dintre cei doi termeni este 0.

Avem aşadar, $x^2 - 4 = 0$ şi $x - 2 = 0$, de unde obţinem $x = 2$.

Soluţia ecuaţiei este 2.

Ex.4 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - x - 2} = x$.

Soluţie: Dintre toate exemplele de până acum acestea este cel mai cumsecade. O astfel de ecuaţie nu presupune niciun fel de condiţie (avem radical de ordin impar); intrăm direct în rezolvare ridicând ecuaţia la puterea a treia.

Prin ridicare la puterea a treia avem

$$\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - x - 2}\right)^3 = x^3$$

de unde

$$x^3 + x^2 - x - 2 = x^3$$

sau

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Această ultimă ecuaţie are soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2 = -1$ (vezi Ex.2).

Ecuaţii exponenţiale

Sunt ecuaţii în care necunoscuta apare ca exponent al unei puteri.

Iată câteva exemple luate din variantele propuse de Centrului Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009:

$$3^{2x-1} = 3^{5-x}$$

$$2^{2x^2+3x-2} = 8$$

$$2^x + 2^{x+3} = 36$$

$$2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$$

$$3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Rezolvarea unei astfel de ecuaţii se bazează, în primul rând, pe proprietatea de bijectivitate a funcţiei exponenţiale.

$$\boxed{a^x = a^y \text{ dacă şi numai dacă } x = y}$$

Atenţie! Proprietatea de mai sus nu se aplică de fiecare dată în mod direct. Până ajungem la acest pas mai avem de făcut şi alte calcule. De aceea este util să cunoaştem câteva proprietăţi ale puterilor.

Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, iar x şi y sunt numere reale atunci:

1. a^x este totdeauna un număr pozitiv.

$$\boxed{a^x > 0}$$

2. Exponentul 0

$$\boxed{a^0 = 1, \text{ pentru orice număr } a \text{ diferit de } 0}$$

3. Exponentul negativ "mută" puterea la numitor.

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$$

4. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază.

$$\boxed{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$$

5. Împărţirea puterilor cu aceeaşi bază.

$$\boxed{a^x : a^y = a^{x-y}}$$

6. Ridicarea la putere a unei puteri.

$$\boxed{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$$

7. Înmulţirea puterilor cu acelaşi exponent.

$$\boxed{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad b > 0,\ b \neq 1}$$

8. Împărţirea puterilor cu acelaşi exponent.

$$\boxed{a^x : b^x = (a:b)^x, \quad b > 0,\ b \neq 1} \text{ sau } \boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Revenim şi rezolvăm împreună câteva exemple.

Ex.1 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{2x-1} = 3^{5-x}$.

Soluţie: În acest caz, aplicarea proprietăţii de bijectivitate este imediată.

Din $3^{2x-1} = 3^{5-x}$ obţinem $2x-1 = 5-x$, o ecuaţie de gradul întâi, care se rezolvă fără dificultate.

Obţinem $3x = 6$, de unde $x = 2$. Aşadar, soluţia ecuaţiei este 2.

Ex.2 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{2x^2+3x-2} = 8$.

Soluţie: Şi aici soluţia este imediată, dacă "ne prindem" că $8 = 2^3$.

Ecuaţia se scrie

$$2^{2x^2+3x-2} = 2^3$$

de unde

$$2x^2 + 3x - 2 = 3$$

sau

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Soluţiile ultimei ecuaţii sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Soluţiile au fost obţinute cu formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, în care $a = 2,\ b = 3,\ c = -5$ şi $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ex.3 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x + 2^{x+3} = 36$.

Soluţie: De această dată nu mai putem folosi direct bijectivitatea pentru că nu avem o egalitate între două exponenţiale. Dar, proprietăţile puterilor scrise mai sus ne permit să obţinem în toată ecuaţia aceeaşi exponenţială (acum avem două exponenţiale: 2^x şi 2^{x+3}).

Vom scrie $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ (vezi proprietatea 4) sau $2^{x+3} = 8 \cdot 2^x$

Cu cele de mai sus ecuaţia se scrie

$$2^x + 8 \cdot 2^x = 36$$

În continuare putem alege două variante de a continua:

1. Notăm $2^x = y > 0$ (mai mare ca 0 din proprietatea 1) şi ecuaţia devine $y + 8y = 36$
2. Scoatem factor comun pe 2^x şi ecuaţia devine $2^x(1+8) = 36$

Alegem varianta 2 şi avem

$$2^x \cdot 9 = 36$$

de unde

$$2^x = 4$$

Am obţinut o situaţie ca cea din Ex2. Vom scrie $4 = 2^2$

De aici

$$2^x = 2^2$$

şi atunci

$$x = 2$$

Soluţia ecuaţiei este 2.

Ex.4 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$.

Soluţie: Şi de această dată avem două exponenţiale (2^x şi 2^{-x}), dar $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ (Vezi proprietatea 3)

Ecuaţia se scrie

$$2^x - 14 \cdot \frac{1}{2^x} = -5$$

Notăm $2^x = y > 0$ (factorul comun nu ne mai ajută) şi ecuaţia devine

$$y - 14 \cdot \frac{1}{y} = -5$$

Aducând la acelaşi numitor şi trecând toţi termenii în membrul stâng avem

$$y^2 + 5y - 14 = 0$$

cu soluţiile $y_1 = -7$ şi $y_2 = 2$.

Revenim la notaţie şi obţinem

$$2^x = 2$$

de unde $x = 1$ (nu am folosit soluţia $y_1 = -7$ deoarece am impus condiţia $y > 0$)

Aşadar, ecuaţia iniţială are soluţia 1.

Ex.5 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Soluţie: Putem scrie, în baza proprietăţii 6, $3^{2x} = (3^x)^2$

Cu cele de mai sus ecuaţia se scrie

$$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Notând $3^x = y > 0$ avem

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

cu soluţiile $y_1 = 1$ şi $y_2 = -3$.

Revenim la notaţie şi obţinem

$$3^x = 1$$

de unde $x = 0$ (nu am folosit soluţia $y_2 = -3$ deoarece am impus condiţia $y > 0$)

Aşadar, soluţia ecuaţiei iniţiale este 0.

*

* *

Ecuaţii logaritmice

Sunt ecuaţii în care necunoscuta apare ca argument sau ca bază a unui logaritm.

Iată câteva exemple luate din variantele propuse de Centrului Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar pentru bacalaureatul din 2009:

$$\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$$

$$\log_5(2x + 3) = 2$$

$$\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$$

Înainte de orice să lămurim ce înseamnă "logaritm în baza a din N", scris $\log_a N$.

Definiţie Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, iar $N > 0$, atunci prin $\log_a N$ înţelegem numărul real x cu proprietatea $a^x = N$

$$\boxed{\log_a N = x \text{ dacă şi numai dacă } a^x = N}$$

Observaţie: Dacă baza logaritmului este 10, în loc de $\log_{10} N$ vom scrie $\lg N$ (citim "logaritm zecimal"), iar în loc de $\log_e N$ vom scrie $\ln N$ (citim "logaritm natural")

Având în vedere definiţia logaritmului este evident că pentru cantitatea de sub logaritm (N) trebuie impusă o condiţie de existenţă (să fie mai mare decât 0).

Rezolvarea acestor ecuaţii se bazează, ca şi în cazul ecuaţiilor exponenţiale, pe bijectivitatea funcţiei logaritmice.

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \text{ dacă şi numai dacă } x = y}$$

Ca şi în cazul ecuaţiilor exponenţiale, nu totdeauna proprietatea de bijectivitate se aplică direct. De aceea este necesar să cunoaştem câteva proprietăţi ale logaritmilor.

Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, iar $A > 0$ şi $B > 0$, atunci:

1. Logaritm în orice bază din 1 este 0.

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

2. Logaritmul bazei este 1.

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

3. Orice număr real se poate scrie ca un logaritm.

$$\boxed{x = \log_a a^x}$$

4. Suma a doi logaritmi este logaritmul produsului.

$$\boxed{\log_a A + \log_a B = \log_a A \cdot B}$$

5. Diferenţa a doi logaritmi este logaritmul câtului.

$$\boxed{\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}}$$

6. Logaritmul unei puteri.

$$\boxed{\log_a A^n = n \cdot \log_a A}$$

7. Logaritmul unui radical.

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A}$$

8. Schimbarea bazei unui logaritm.

$$\boxed{\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}}$$

Revenim şi rezolvăm împreună câteva exemple.

Ex.1 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$.

Soluţie: Definiţia logaritmului ne obligă să impunem condiţii de existenţă a logaritmilor.

Avem următoarele condiţii de existenţă:

$$x^2 - 2x > 0 \text{ şi } 2x - 3 > 0$$

Prima inecuaţie are soluţia $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, iar cea de a doua $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Prima inecuaţie s-a rezolvat cu semnul funcţiei de gradul al doilea.

Tabelul de semn este

x	$-\infty$		0		2		∞
$x^2 - 2x$	+ + + + +		0	- - - - -	0	+ + + +	

Intersecţia celor două soluţii conduce la $x \in (2, \infty)$.

Rezolvarea propriu-zisă se bazează pe bijectivitatea funcţiei logaritmice.
Din

$$\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x - 3)$$

obţinem

$$x^2 - 2x = 2x - 3$$

Trecând toţi termenii în membrul stâng şi reducând termenii asemenea se obţine ecuaţia

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

cu soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$.
Având în vedere condiţiile impuse, soluţia ecuaţiei este 3.

Ex.2 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(2x + 3) = 2$.

Soluţie: Avem condiţia de existenţă a logaritmului $2x + 3 > 0$ cu soluţia $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$.

De această dată nu putem aplica direct bijectivitatea. Dar, în baza proprietăţii 3 putem scrie $2 = \log_5 5^2$ sau $2 = \log_5 25$.
Cu cele de mai sus putem scrie

$$\log_5(2x + 3) = \log_5 25$$

şi atunci

$$2x + 3 = 25$$

de unde $x = 11$ care îndeplineşte condiţia de existenţă ($11 \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$). Aşadara, soluţia ecuaţiei este 11.

Ex.3 Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$.
Soluţie: Condiţiile de existenţă a logaritmilor sunt: $x+4 > 0$, $2x+3 > 0$ şi $1-2x > 0$. Soluţiile celor trei inecuaţii sunt $x \in (-4, \infty)$, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$, respectiv $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. Intersecţia celor trei intervale conduce la $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pentru a putea aplica bijectivitatea funcţiei logaritmice este necesar ca în membrul stâng să avem un singur logaritm. Acest lucru se poate realiza folosind proprietatea 4. Avem $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(x + 4)(2x + 3)$
Cu cele de mai sus, ecuaţia se scrie

$$\lg(x + 4)(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$$

şi cu bijectivitatea funcţiei logaritmice avem

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x$$

De aici obţinem

$$2x^2 + 3x + 8x + 12 = 1 - 2x$$

sau

$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

cu soluţiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = -\frac{11}{2}$.
Având în vedere condiţia impusă rezultă că soluţia ecuaţiei este -1.
$\left(-1 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ şi } -\frac{11}{2} \notin \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$

Atenţie! La subictul 1 pot să apară şi alt gen de probleme cu logaritmi. Prezentăm mai jos un exemplu.

Să se calculeze $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10$.

Avem $\log_3 5 + \log_3 6 - \log_3 10 = \log_3 5 \cdot 6 - \log_3 10$ (proprietatea 4)$= \log_3 30 - \log_3 10 = \log_3 \frac{30}{10}$ (proprietatea 5)$= \log_3 3 = 1$(proprietatea 2)

Încercaţi acum să rezolvaţi:

1. $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$
2. $\sqrt{2x+3} = x$
3. $2^{\sqrt{x-1}} = 4$
4. $125^x = \frac{1}{5}$
5. $2^{x+3} - 2^x = 28$
6. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$
7. $\log_2(x-3) = 0$
8. $\log_3(x^2 - 4x + 4) = 2$
9. $\log_2(x+2) - \log_2(x+1) = 1$
10. Calculaţi $\log_2 3 - \log_2 \frac{3}{2}$.
11. Să se arate că numărul $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\log_2 8}$ este natural.