Aplicații ale integralei definite

Aria unei suprafețe plane

- Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$\Gamma_f=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$$

se numeşte *subgraficul* lui f (este mulțimea punctelor din plan, cuprinse între graficul lui f, axa Ox şi dreptele $x=a, x=b$).

$$\mathcal{A}=aria\,(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)dx.$$

- Dacă $f:[a,b]\to R$ este o funcție continuă, care pe intervalul $[a,b]$ ia atât valori pozitive, cât şi negative, atunci aria suprafeței plane determinate de graficul funcției, axa Ox şi dreptele $x=a, x=b$) este

$$\mathcal{A}=aria\,(\Gamma_f)=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

şi pentru calculul integralei se explicitează $|f(x)|$ pentru $x\in[a,b]$.

Volumul unui corp de rotație

- Dacă $f:[a,b]\to[0,\infty)$ este o funcție continuă, atunci mulțimea

$$C_f=\left\{(x,y,z)\in R^3\,\middle|\,\sqrt{y^2+z^2}\le f(x), a\le x\le b\right\}$$

se numeşte *corpul de rotație* determinat de funcția f (corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției în jurul axei Ox cu 360^0).

$$Vol(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Aplicații

1) Se consideră funcțiile $I_n:R\to R, n\in N, f_0(x)=1$ şi $I_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt$. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției I_2, axa Ox şi dreptele $x=0, x=1$.

- Avem $I_1(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}$.

$$\mathcal{A}=aria\,(\Gamma_f)=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

2) Se consideră $f, F: R \to R, f(x) = x\, e^x,\ F(x) = (x-1)\, e^x$.

a) Verificați că F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0, x = 1$.

a) F este o primitivă a lui f dacă este derivabilă și $F' = f$.

Avem $F'(x) = e^x + (x-1)e^x = x\, e^x = f(x)$, deci F este primitiva lui f.

b) Cum pentru $x \in [0,1], f(x) \geq 0$, aria cerută este

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\, e^x dx = F(1) - F(0) = 0 + 1 = 1.$$

3) Se consideră $f: [2, \infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$. Să se determine $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = a$ să fie $\ln 3$.

- Avem $\int_2^a f(x)dx = \ln 3$.

  Rezultă $\int_2^a \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln 3$,

  adică $(\ln 3 + \ln(x-1))|_2^a = \ln 3$

  sau $\ln \frac{a(a-1)}{2} = \ln 3$,

  de unde $a^2 - a - 6 = 0$

  cu soluțiile $a = -2$ și $a = 3$.

  Cum $a > 2$, convine $a = 3$.

4) Fie $f, F: (0, \infty) \to R, f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ și $F(x) = x - \ln x$.

a) Arătați că F este o primitivă a funcției f.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e$.

- Cum $F(x) = x - \ln x$ este derivabilă și
  $F' = 1 - \frac{1}{x} = f(x)$,

  rezultă că F este o primitivă a funcției f.

b) $\mathcal{A} = \int_1^e (x - \ln x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \ln x\, dx.$

Integrând prin părți rezultă că

$\int_1^e \ln x\, dx = x\ \ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$ şi

$\mathcal{A} = \frac{e^2-1}{2} - 1 = \frac{e^2-3}{2}.$

5) Fie $f: R \to R, f(x) = e^x + x^2 + 2x$. Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h: [0,1] \to R, h(x) = \frac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele $x = 0, x = 1$.

- Avem $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1} > 0, \forall x \in R$ şi deci

  $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x + 1)\Big|_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}.$

6) Se consideră $f: [0,1] \to R, f(x) = \sqrt{x+2}$. Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0$ şi $x = 1$.

- Evident $f(x) > 0$ şi

  $\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{x+2}dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$

7) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între, graficul funcției
$f: [0,1] \to R, f(x) = e^x(2x^2 - 2x + 1)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$.

- Cum $2x^2 - 2x + 1 = x^2 + (x-1)^2 > 0$,

  rezultă $f(x) > 0$ şi

  $$\mathcal{A} = \int_0^1 e^x(2x^2 - 2x + 1)dx.$$

  Integrăm prin părți şi avem

  $$\mathcal{A} = e^x(2x^2 - 2x + 1)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(4x-2)dx = e - 1 - \left[e^x(4x-2)\Big|_0^1 - 4\int_0^1 e^x dx\right]$$
  $$= e - 1 - (2e + 2 - 4e^x)\Big|_0^1 = e - 1 - 2e - 2 + 4e - 4 = 3e - 7.$$

8) Se consideră $f: [0,1] \to R, f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x = 0, x = 1$.

- Avem $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^3+1-1}{x+1}dx$.

  Cum $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ rezultă
  $$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right]\Big|_0^1 = \frac{5}{6}-\ln 2.$$

9) Determinați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $f:[0,1]\to R, f(x)=1-x$.

- Avem $V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1(1-x)^2dx = \pi\int_0^1(1-2x+x^2)dx =$
  $$= \pi\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(1-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

10) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to R, g(x)=3^{-x}$.

- $V(C_f)=\pi\int_0^1 3^{-2x}dx = -\frac{\pi}{2\ln 3}\cdot 3^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2\ln 3}(3^{-2}-1)=\frac{\pi}{2\ln 3}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{4\pi}{9\ln 3}$.

11) Se consideră $f:R\to R, f(x)=x+e^{-x}$. Determinați volumul obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to R, g(x)=f(x)+f(-x)$.

- Avem $f(x)+f(-x)=x+e^{-x}-x+e^{x}=e^{x}+e^{-x}$ și
  $$V(C_f)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx = \pi\left(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{2}+2x\right)\Big|_0^1 =$$
  $= \pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}+2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi(e^4+4e^2-1)}{2e^2}$.

12) Fie $f:(0,\infty)\to R, f(x)=x-\frac{1}{x}$. Dacă $g,h:[1,e]\to R, g(x)=f(x)$ și $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, arătați că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox a graficelor funcțiilor g și h sunt egale.

- $V(C_g)=\pi\int_1^e f^2(x)dx = \pi\int_1^e(x-\frac{1}{x})^2dx$ și
  $V(C_h)=\pi\int_1^e f^2\left(\frac{1}{x}\right)dx = \pi\int_1^e(\frac{1}{x}-x)^2dx$.

  Cum $(x-\frac{1}{x})^2=(\frac{1}{x}-x)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$, cele două volume sunt egale.

13) Dacă $f: [0,1] \to R, f(x) = x\sqrt{2-x^2}$, aflați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f.

- $V(C_f) = \pi\int_0^1 x^2(2-x^2)dx = \pi\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)|_0^1 = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{7\pi}{15}$.

14) Fie $f: [0,1] \to R, f(x) = e^{x^3}$. Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g: [0,1] \to R, g(x) = xf(x)$.

- $V(C_g) = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^2f^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^2e^{2x^3}dx = \frac{\pi}{6}\int_0^1 6x^2e^{2x^3}dx =$
$$= \frac{\pi}{6}e^{2x^3}|_0^1 = \frac{\pi}{6}(e^2-1).$$

15) Se consideră funcția $f: [0,1] \to R, f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Folosind faptul că $1 \le (x+1)^2 \le 4$ pentru orice $x \in [0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției f este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

- Avem $V(C_f) = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2}dx$.

  Din $1 \le (x+1)^2 \le 4$ rezultă

  $\frac{1}{4} \le \frac{1}{(x+1)^2} \le 1$, adică

  $\frac{x^6}{4} \le \frac{x^6}{(x+1)^2} \le x^6$ și integrând pe $[0,1]$ obținem

  $\int_0^1 \frac{x^6}{4}dx \le \int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2}dx \le \int_0^1 x^6dx$ și deci

  $\int_0^1 \frac{x^6}{4}dx \le V(C_f) \le \pi\int_0^1 x^6dx$ sau

  $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^7}{7}|_0^1 \le V(C_f) \le \pi\cdot\frac{x^7}{7}|_0^1$,

  deci $\frac{\pi}{28} \le V(C_f) \le \frac{\pi}{7}$

16) Se consideră funcția $f: (0,\infty) \to R, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

a) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 1$, $x = 2$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului $g: [1,2] \to R$, $g(x) = f(x)$.

- a) $\mathcal{A} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) dx = [\ln x + \ln(x+1)] \,|_1^2 = \ln\frac{x+1}{x}\,|_1^2 = \ln\frac{3}{2} - \ln 2 = \ln\frac{3}{4}$
- b) $V(C_f) = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)^2 dx =$

$$= \pi \int_1^2 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left[\frac{1}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} + 2(\ln x - \ln(x+1)) - \frac{1}{x+1}\right] |_1^2 =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2} + 2(\ln 2 - \ln 3) - \frac{1}{3} + 1 - 2(\ln 1 - \ln 2) + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \pi \left(2\ln\frac{2}{3} + 2\ln 2 + \frac{2}{3}\right) = \pi\left(\frac{2}{3} + 2\ln\frac{4}{3}\right).$$