Polinoame

Vom prezenta doar elementele teoretice de strictă necesitate pentru rezolvarea problemelor care apar în subiectele de tip bacalaureat M2, omițând partea de construcție a polinoamelor, precum şi o suită de rezultate care, deşi importante, ar încărca foarte mult expunerea.

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, unde K este, în general, una dintre mulțimile R, Q sau Z_p (p - număr prim).

Forma algebrică a unui polinom cu coeficienți în K este

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

- X se numeşte *nederminată*
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$ - *coeficienții* polinomului
- dacă $a_n \neq 0$, spunem că polinomul are *gradul* n şi a_n se numeşte coeficientul dominant
- a_0 se numeşte *termen liber*
- Notăm $K[X]$, mulțimea polinoamelor cu coeficienți în corpul $(K, +, \cdot)$.

Polinoame egale

Fie $f, g \in K[X]$

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \text{ şi}$$
$$g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_1X + b_0.$$

Cele două polinoame sunt *egale* dacă au acelaşi grad şi coeficienții termenilor de grade egale (cei care au exponenți egali ai nedeterminatei X) sunt egali, adică

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_i = b_i \end{cases}, \forall i = \overline{1, n}$$

Adunarea polinoamelor

Se realizează adunând termenii de acelaşi grad, adică

$$f + g = \cdots (a_p + b_p)X^p + \dots + (a_2 + b_2)X^2 + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$$

Înmulțirea polinoamelor

Se face înmulțind fiecare termen al unui polinom cu toți termenii celuilalt polinom (folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare) şi apoi adunând termenii de acelaşi grad.

Observații:

- Înmulțirea unui polinom cu un scalar este un caz particular, în care unul dintre polinoame este polinomul constant nenul (de grad 0).
- Adunarea şi înmulțirea polinoamelor sunt operații comutative şi asociative.

Împărțirea polinoamelor

1) Teorema împărțirii cu rest

Pentru orice două polinoame $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, există şi sunt unice polinoamele $q, r \in K[X]$, numite *cât* şi *rest,* astfel încât $f = g \cdot q + r$ şi $grad\, r < grad\, g$ (f se numeşte *deîmpărțit*, g *împărțitor*).

2) Împărțirea prin X-a. Schema lui Homer

Restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la polinomul $X - a$ este $r = f(a)$, ceea ce rezultă imediat dacă în teorema împărțirii cu rest: $f = (X - a)q + r$ luăm $X = a$.

Schema lui Homer – constituie un procedeu rapid de determinare a câtului şi restului împărțirii unui polinom f prin $X - a$.

Scriind teorema împărțirii cu rest, dacă

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0 \text{ şi}$$
$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} \ldots + b_1X + b_0.$$
$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_1X + a_0 =$$
$$= (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} \ldots + b_1X + b_0) + r.$$

Efectuând înmulțirea din membrul al doilea şi apoi identificând coeficienții obținem:

$b_{n-1} = a_n$
$b_{n-2} = a \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$
$b_{n-3} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$

....
$b_0 = a \cdot b_1 + a_1$
$r = a \cdot b_0 + a_0$

Pentru determinarea coeficienților câtului şi a restului se alcătuieşte următoarea schemă:

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$a_n = b_{n-1}$	$ab_{n-1} + a_{n-1} = b_{n-2}$	$ab_{n-2} + a_{n-2} = b_{n-3}$	...	$ab_1 + a_1 = b_0$	$ab_0 + a_0 = r$

Exemplu: Aflați câtul ți restul împărțirii polinomului $f = 2X^4 + 9X^3 + 4X^2 - 8X + 23$ prin $X + 3$.

- Avem $a = -3$ şi tabelul

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	9	4	−8	23
−3	2	3	−5	7	2

Câtul este $q = 2X^3 + 3X^2 - 5X + 7$, iar restul $r = 2$.

Divizibilitatea polinoamelor

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ şi polinoamele $f, g \in K[X]$. Spunem că polinomul g divide polinomul f dacă există polinomul $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$.

Scriem $g \mid f$ şi citim g divide f sau $f \vdots g$ şi citim f este divizibil cu g.

Observații

- Polinomul g se numeşte *divizor* al polinomului f, iar polinomul f se numeşte *multiplu* al polinomului g.

- Polinoamele constante nenule $f = a, a \in K^*$, sunt divizori pentru orice polinom din $K[X]$.

- Polinomul nul $f = 0 \in K[X]$ este divizibil cu orice polinom $g \in K[X]$.

- Polinomul g divide polinomul $f \Leftrightarrow$ restul împărțirii lui f la g este zero.

Rădăcini ale polinoamelor

Fie polinomul $f \in K[X], \alpha \in K$ este o *rădăcină* a polinomului dacă $f(\propto) = 0$.
Avem următoarea *teoremă (Bézout)*:

$\propto$ este o *rădăcină* a polinomului f dacă şi numai dacă f se divide cu polinomul $X - \propto$.

Rădăcini ale multiple ale unui polinom

Fie polinomul $f \in K[X], \alpha \in K$ este o *rădăcină a multiplă* de ordinal h a polinomului dacă acesta se divide cu $(X - \propto)^h$.

Dacă $h = 1$, rădăcina $\propto$ este simplă, dacă $h = 2$, rădăcina este dublă, dacă $h = 3$, rădăcina este triplă etc.

Observație:

Dacă $f, g \in K[X]$, polinomul f se divide cu polinomul g dacă orice rădăcină a lui g este şi rădăcină a lui f, cu cel puțin acelaşi ordin de multiplicitate.

Relațiile lui Viète

1) Dacă f este un polinom de gradul 2

$$f = a_2X^2 + a_1X + a_0, a_2 \neq 0$$

reamintim că între rădăcinile şi coeficienții polinomului avem relațiile:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$
$$x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

2) Dacă f este un polinom de gradul 3

$$f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, a_3 \neq 0,$$

atunci relațiile lui Viète sunt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

3) Dacă $f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, a_4 \neq 0$, atunci relațiile lui Viète sunt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_4}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{a_1}{a_4}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{a_0}{a_4}$$

Ecuații algebrice cu coeficienți în *Z, Q, R*

O ecuație de forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, unde $a, b, c, d, e \in A$, unde A poate fi oricare dintre mulțimile Z, Q, R, se numește *ecuație algebrică* de grad cel mult 4.

Ne referim în cele ce urmează la ecuații algebrice cu toate cele 4 rădăcini reale şi vom reaminti câteva tipuri de ecuații particulare.

1) Ecuații *reciproce de gradul 4* sunt acelea în care $a = e \neq 0$ şi $b = d$, adică cele de forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Pentru a rezolva o astfel de ecuație împărțim prin x^2. Obținem

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Notăm $x + \frac{1}{x} = y$, rezultă $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ şi ecuația de gradul 2

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

2) Ecuațiile *reciproce de gradul 3* sunt ecuațiile în care $a = 0, b = \pm e, c = \pm d$, adică

$$bx^3 + cx^2 + cx + b = 0$$

sau

$$bx^3 + cx^2 - cx - b = 0.$$

Prima ecuație are rădăcina $x_1 = -1$ şi, prin împărțirea prin $x + 1$, obținem apoi o ecuație de gradul 2 cu rădăcinile x_2, x_3.

A doua ecuație are rădăcina $x_1 = 1$ şi, împărțind la $x - 1$, se obține o ecuație de gradul 2.

3) Ecuațiile *bipătrate* sunt acelea în care $b = d = 0$, deci ecuația este

$$ax^4 + cx^2 + e = 0.$$

Se notează $x^2 = y > 0$, obținem ecuația de gradul 2

$$ay^2 + by + e = 0.$$

<u>Aplicații</u>

1) Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ şi $h = X^2 - 4$. Să se determine $a, b \in R$ astfel încât $f = g \cdot h$.

- Avem

$$g \cdot h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4) = X^4 - 4X^2 + 2X^3 - 8X - 24X^2 + 96$$

sau

$$g \cdot h = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96.$$

Dacă $f = g \cdot h$, coeficienții termenilor de acelaşi grad sunt egali. Rezultă deci $a = 2$ şi $b = -8$.

2) Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^3)^{669} \in Z[X]$ cu formă algebrică

$f = a_{2007}X^{2007} + \cdots + a_1X + a_0$.

a) Să se arate că suma coeficienților polinomului $a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$ este un număr divizibil cu 3.

b) Să se deterrmine restul împărțirii polinomului prin $X^2 - 1$.

- a) Suma coeficienților polinomului f este egală cu $f(1)$. Avem

$$f(1) = (1+1+1)^{669} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007},$$

deci

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007} = 3^{669},$$

care este un multiplu de 3.

- b) Din teorema împărțirii cu rest, $f = (X^2-1)q + r$, unde, deoarece gradul lui r este mai mic decât 2, avem $r = ax + b$, deci $f = (X^2-1)q + ax + b$ şi, cum $f(1) = a + b$, iar $f(-1) = -a + b$, obținem

$$a = \frac{f(1)-f(-1)}{2} \text{ şi } b = \frac{f(1)+f(-1)}{2}.$$

Din $f(1) = 3^{669}$ şi $f(-1) = 1$, rezultă

$$r = \frac{3^{669}-1}{2} \cdot X + \frac{3^{669}+1}{2}.$$

3) Se consideră polinoamele $f, g \in R[X], f = (X+1)^{2012} + (X-1)^{2012}$ şi $g = X + 1$. Să se determine restul împărțirii polinomului f prin g.

- Vom folosi faptul că restul împărțirii unui polinom prin $X - a$ este $f(a)$. Avem $a = -1$, deci $r = f(-1) = 2^{2012}$.

4) Se consideră $f, g \in Z_5[X], f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{3}$. Să se determine $a \in Z_5[X]$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu g.

- Polinomul f se divide cu g dacă restul împărțirii lui f la g este zero. Folosind împărțirea cu $X - a$, avem $a = -\hat{3} = \hat{2}$ şi deci $r = f(\hat{2}) = \hat{3} + \hat{4}a + \hat{2} + \hat{1}$. Deci $\hat{4}a + \hat{1} = \hat{0}$, adică $\hat{4}a = \hat{4}$ şi deci $a = \hat{1}$.

5) În $R[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$. Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.

- a) Polinomul se divide cu $X - 1$ dacă $f(1) = 0$. Avem $f(1) = 1 + 3 - 3 - 1 = 0$, deci $X - 1 \mid f$.

6) Se consideră polinoamele $f, g \in R[X], f = (X-1)^{10} + (X-2)^{10}$ şi $g = X^2 - 3X + 2$. Arătați că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

- Polinomul f se divide cu polinomul g dacă orice rădacină a lui g este şi rădăcină a lui f. Rădăcinile polinomului g sunt *1* şi *2* şi, cum $f(1) = (-1)^{10} = 1 \neq 0$, rezultă că *1* nu este rădăcină a lui f (de altfel nici *2* deoarece şi $f(2) = 1$), de unde rezultă că polinomul g nu divide polinomul f.

7) Se consideră polinoamele $f, g \in R[X], f = X^3 + mX^2 + nX + 6$ şi $g = X^2 - X - 2$. Să se determine $m, n \in R$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

- Rădăcinile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$ sunt -1 și 2. Polinomul f se divide cu polinomul g dacă orice rădacină a lui g este și rădăcină a lui f. Avem deci $f(-1) = 0$ și $f(2) = 0$, adică

$$\begin{cases} -1 + m - n + 6 = 0 \\ 8 + 4m + 2n + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = -5 \\ 2m + n = -7 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4 \text{ și } n = 1.$$

8) Dacă $f, g \in R[X], f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^3 + X^2 + X + 1$, să se demonstreze că $f = X \cdot g + 1$ și apoi să se calculeze $f(a)$, știind că a este o rădăcină a polinomului g.

- Avem $X \cdot g + 1 = X(X^3 + X^2 + X + 1) + 1 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = f$. Deci $f = X \cdot g + 1$ și $f(a) = a \cdot g(a) + 1$. Cum a este rădăcină a polinomului g, rezultă $g(a) = 0$ și $f(a) = 1$.

9) Se consideră polinoamele $f, g \in R[X]$, $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ și $g = X^3 + X - 2$. Să se determine $a, b \in R$ astfel încât polinomul g să dividă polinomul f și apoi descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste R.

- Împărțim polinomul f la polinomul g:

$$\begin{array}{l|l} X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6 & X^3 + X - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-X^4 \qquad\qquad\quad - X^2 + 2X} & X + a \\ /\qquad aX^3 + (b-1)X^2 - 3X + 6 & \\ \qquad \underline{-aX^3 \qquad\qquad - aX + 2a} & \\ \qquad / \quad (b-1)X^2 - (3+a)X + 2a + 6 & \end{array}$$

Cum polinomul f se divide cu polinomul g, avem restul împărțirii lui f la g egal cu zero, deci $(b-1)X^2 - (3+a)X + 2a + 6 = 0$ și de aici $b - 1 = 0, 3 + a = 0, 2a + 6 = 0$, adică $b = 1$ și $a = -3$. Rezultă $f = X^4 - 3X^3 + X^2 - 5X + 6$ sau $f = (X-3)g$, $g = X^3 + X - 2 = X^3 - 1 + X - 1 = (X-1)(X^2 + X + 2)$. Deoarece $X^2 + X + 2$ are $\Delta < 0$, rezultă că descompunerea în factori ireductibili în $R[X]$ a polinomului f este

$$f = (X-3)(X-1)(X^2 + X + 2).$$

10) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4 \in R[X]$.
a) Determinați $a \in R$ dacă $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ dacă $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile polinomului.
b) Determinați $a \in R$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X^2 - 2$.

- a) Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, deci $-a = -2$ și $a = 2$.

- b) Cum polinomul g are rădăcinile $\pm\sqrt{2}$, $g \mid f$ dacă $\pm\sqrt{2}$ sunt rădăcini şi pentru f, adică $f(\pm\sqrt{2}) = 0$. Avem

$$2\sqrt{2} + 2a - a\sqrt{2} - 4 = 0 \text{ şi}$$
$$-2\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} - 4 = 0$$

de unde, prin adunare, se obține $4a = 8$, adică $a = 2$.

11) Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2 + 7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in R$.
a) Să se determine $m \in R$, ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.
b) Să se determine $m \in R$, ştiind că suma rădăcinilor polinomului este *2*.

- a) Dacă $x = 1$ este rădăcină a polinomului, avem $f(1) = 0$, adică

$$4 + 4m + m^2 + 7 + 4m + 4 = 0$$

sau

$$m^2 + 8m + 15 = 0$$

cu $m_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}$, adică $m_1 = -3$ şi $m_2 = -5$.

- b) Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{4m}{4}$, deci $m = -2$.

12) Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se verifice că

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$$

- Punem x_1, x_2, x_3 să verifice ecuația $f(x) = 0$ şi avem

$$x_1^3 - 9x_1^2 - x_1 + 9 = 0$$
$$x_2^3 - 9x_2^2 - x_2 + 9 = 0$$
$$x_3^3 - 9x_3^2 - x_3 + 9 = 0$$

Adunând egalitățile obținute, avem

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) + 27 = 0.$$

Rezultă

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) - 27.$$

Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ şi deci

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18.$$

13) Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 - 5X + 14$ şi $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile polinomului. Să se demonstreze egalitatea

$$S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1.$$

- Cum $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile polinomului, avem

$$x_1^3 - 4x_1^2 - 5x_1 + 14 = 0$$
$$x_2^3 - 4x_2^2 - 5x_2 + 14 = 0$$
$$x_3^3 - 4x_3^2 - 5x_3 + 14 = 0$$

Adunând, obținem

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 5(x_1 + x_2 + x_3) + 42 = 0$$

sau $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

14) Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b \in R[X]$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$. Să se determine $a \in R$, ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$.

- Din relațiile lui Viète avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \text{ şi}$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a.$$

Cum

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

rezultă $4 - 2a = 2$ şi deci $a = 1$.

15) În mulțimea $R[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$. Să se calculeze în funcție de p suma $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

- Avem $\begin{cases} x_1^3 + px_1^2 + 1 = 0 \\ x_2^3 + px_2^2 + 1 = 0 \\ x_3^3 + px_3^2 + 1 = 0 \end{cases}$ (1)

şi, prin adunare:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3 = 0.$$

Cum

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

şi, din relațiile lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

iar

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0,$$

rezultă

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -p^3 - 3.$$

Înmulțind relațiile (1) cu x_1 prima şi respectiv x_2, x_3 pe celelalte, obținem:

$$\begin{cases} x_1^4 + px_1^3 + x_1 = 0 \\ x_2^4 + px_2^3 + x_2 = 0 \\ x_3^4 + px_3^3 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Adunând, avem

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + p(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

şi deci avem

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = -p(-p^3 - 3) - (-p),$$

adică

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = p^4 + 4p.$$

16) Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + 1 \in R[X]$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$ şi fie $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Să se arate că $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

- Din relațiile lui Viète

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Cum

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m,$$

rezultă $S_2 = 1 - 2m$. Punând $x_1,\ x_2,\ x_3$ să verifice ecuația $f(x) = 0$ şi adunând apoi egalitățile obținute, avem

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + m(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0.$$

Rezultă $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

17) Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 1$ cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3, x_4$. Să se calculeze produsul $S \cdot P$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, P = x_1x_2x_3x_4$ şi suma $T = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$.

- Din relațiile lui Viète avem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \text{ şi}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 1.$$

Rezultă $S \cdot P = 0 \cdot 1 = 0$.
Pentru a calcula suma T punem rădăcinile să verifice ecuația $f(x) = 0$ şi, adunând relațiile obținute, rezultă

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 4 = 0.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 4$$

Rezultă $T = 8 - 4$, adică $T = 4$.

Observație: $f = (X^2 - 1)^2$ are rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = x_4 = -1$, deci $T = 4$.

18) Se consideră ecuația $x^4 - ax^3 - ax + 1 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3, x_4. Să se determine $a \in R$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 25$. Pentru $a = 1$ să se găsească soluțiile reale ale ecuuației.

- Din relațiile lui Viète avem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \text{ şi}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

Cum

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$$

rezultă

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

deci $a^2 = 25$ şi $a = \pm 5$.

Pentru $a = 1$ ecuația devine

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0,$$

care este o ecuație reciprocă de gradul 4. Împărțim prin x^2 şi obținem

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Notăm $x + \frac{1}{x} = y$. Rezultă

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \text{ şi } y^2 - y - 2 = 0$$

cu soluțiile y$= -1, y = 2$.

Pentru y$= -1$ rezultă $x + \frac{1}{x} = -1$ sau $x^2 + x + 1 = 0$ care nu are soluții reale ($\Delta < 0$).

Pentru y$= 2$ rezultă $x + \frac{1}{x} = 2$ sau $x^2 - 2x + 1 = 0$ care are rădăcina dublă $x = 1$.

19) Să se arate că polinomul $f = X^3 + X^2 + X - 1$ nu are toate rădăcinile reale.

- Calculăm

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Din relațiile lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1.$$

Rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2 < 0$. Cum o sumă de pătrate de numere reale este mai mare sau egală cu zero şi suma pătratelor rădăcinilor ecuației este negativă, înseamnă că acestea nu sunt toate reale.

20) Fie polinomul $f \in R[X], f = X^3 - pX^2 + qX - r$, cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in R$. Să se calculeze expresia $E = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

- Efectuând înmulțirea avem:

$$E = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

Din relațiile lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = p$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \text{ şi}$$

$$x_1x_2x_{3.} = r.$$

Rezultă $E = 1 - p + q - r$.

21) Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Să se determine $a, b, c \in R$ dacă soluțiile ecuației sunt şi soluții ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -2. \end{cases}$$

- Din relațiile lui Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases}$$

Rezultă $a = -2$ şi $b = -2$.
A doua ecuație a sistemului se scrie, aducând la acelaşi numitor

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \tfrac{1}{2}x_1x_2x_3,$$

de unde, ținând cont de a treia ecuație, rezultă $x_1x_2x_3 = -4$, deci $c = 4$.

Observație: Soluțiile sistemului sunt soluțiile ecuației

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0 \iff x^2(x-2) - 2(x-2) = 0 \iff (x^2-2)(x-2) = 0$$

şi $x_1 = 2, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$, adică sistemul, fiind simetric în x_1, x_2, x_3, are soluțiile

$$(2,\ \sqrt{2}, -\sqrt{2});\ (2, -\sqrt{2}, \sqrt{2});\ (\sqrt{2},\ 2, -\sqrt{2});$$
$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2);\ (-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2});\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2).$$

22) Fie ecuația $x^3 - 11x + 23 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3. Calculați valoarea determinantului

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

- Din relațiile lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Adunând linia a doua şi a treia la prima linie, obținem

$$d = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \text{ adică}$$

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$