<u>Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor</u>

- intervine în stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile şi a punctelor de extrem.

Un rol important în studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor îl are teorema lui Lagrange:

- Fie $f:[a,b] \to R$. Dacă f este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b) atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Reamintim:

- $f: I \to R$ este *<u>monoton descrescătoare</u>* pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ => f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f: I \to R$ este *<u>monoton crescătoare</u>* pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ => f(x_1) \leq f(x_2)$.

Teorema lui Lagrange are următoarea consecință, utilă pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții:

- Fie $f: I \to R$ o funcție derivabilă pe I. Atunci

1) funcția este monoton descrescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$
2) funcția este monoton crescătoare pe I dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Observații

a) dacă f este derivabilă pe I şi $f'(x) < 0, \forall x \in I$, respectiv $f'(x) > 0, \forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I, respectiv sctict crescătoare.

b) Etapele stabilirii intervalelor de monotonie ale unei funcții $f: I \to R$ sunt următoarele:

- se calculează $f'(x)$
- se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$
- se stabileşte semnul funcției f' pe intervalele pe care nu se anulează
- se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei cu ajutorul tabelului de variație al funcției.

<u>Puncte de extrem</u>

Reamintim:

- Dacă $f: I \to R, x_0 \in I$ este punct de *<u>minim relativ</u>* (local) dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \geq f(x_0)$.

- Dacă $f: I \to R, x_0 \in I$ este punct de *<u>maxim relativ</u>* (local) dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \leq f(x_0)$.

- Punctele de minim sau maxim relativ ale unei funcții se numesc *puncte de extrem relativ* ale funcției.

- Valorile funcției în punctele de extrem se numesc *extremele* funcției.

Un rol important în determinarea punctelor de extrem ale unei funcții îl are teorema lui Fermat:

- Fie $f: [a, b] \to R$ o funcție derivabilă. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este punct de extrem, atunci $f'(x_0) = 0$ (în punctele de extrem din interiorul intervalului derivata se anulează).

Observații

a) Reciproca acestei teoreme nu este o propoziție adevărată. Dacă $f'(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem.

b) Rezultă din această teoremă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile se găsesc printre rădăcinile derivatei.

c) Dacă $f: I \to R$, derivabilă, şi x_0 se află în interiorul intervalului I cu $f'(x_0) = 0$, atunci:

- dacă în stânga lui x_0 derivata este negativă, iar în dreapta pozitivă, punctul x_0 este punct de minim;
- dacă în stânga lui x_0 derivata este pozitivă, iar în dreapta negativă, punctul x_0 este punct de maxim.

d) Studiul monotoniei funcției şi găsirea extremelor folosesc la stabilirea unor inegalități.

e) Pentru o mai mare uşurinţă a studiului vom alcătui în majoritatea cazurilor tabelul de variație al funcției.

Aplicații

1) Se consideră $f: (0, \infty) \to R, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
b) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

- a) Calculăm $f'(x)$ şi apoi soluțiile ecuației $f'(x_0) = 0$. Avem
  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$,
  $f'(x) = 0$, rezultă $2 - \ln x = 0$, adică $\ln x = 2$ şi $x = e^2$.

  Tabelul de variație al funcției este:

x	0		e^2		∞
$f'(x)$		$+ \; +$	0	$- \; - \; -$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

  Funcția dată este strict crescătoare pe $(0, e^2]$ şi strict descrescătoare pe $[e^2, \infty)$. Punctul $x_0 = e^2$ este punct de maxim.

- b) Inegalitatea cerută este echivalentă cu $\ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}}$ $<=>$ $\sqrt{5}\,\ln 3 < \sqrt{3}\,\ln 5$ $<=>$ $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}$ $<=>$ $f(3) < f(5)$ adevărat deoarece $3 < 5 < e^2$ şi pe intervalul $(0, e^2]$ funcția este strict crescătoare.

2) Se consideră funcția $f: R - \{-1\} \to R, f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.
b) Să se demonstreze că $f(x) \le -4$ pentru orice $x < -1$.

- a) Avem $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$, adică $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ şi
  $f'(x) = 0 \; => \; x^2 + 2x = 0$ cu soluțiile x$= -2$ şi $x = 0$. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$ | ∞	$\searrow$	m	$\nearrow$	∞

Pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,-2]$și $[0,\infty)$, $f'(x)>0$, deci funcția este strict crescătoare. Pe $[-2,-1]$, $și$ $(-1{,}0)$, $f'(x)<0$ deci funcția este strict descrescătoare.

- b) Pe intervalul $(-\infty,-1]$ punctul $x_0=-2$ este punct de maxim, iar $f(-2)=-4$ este maximul funcției pe acest interval, deci $f(x)\leq -4$ pentru orice $x<-1$.

3) Se consideră $f:(0,\infty)\to R, f(x)=x-2\ln x$. Să se demonstreze că

$$f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4},\qquad \forall x\in(0,\infty).$$

- Avem$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=2$.

x	0		2		∞
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Cum $x_0=2$ este punct de minim, rezultă $f(x)\geq f(2), \forall x\in(0,\infty)$ și cum $f(2)=2-2\ \ln 2=\ln e^2-\ln 4=\ln\frac{e^2}{4}$, rezultă $f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4}, \forall x\in(0,\infty)$.

4) Se consideră funcția $f:(-1,\infty), f(x)=\frac{e^x}{x+1}$. Să se demonstreze că $f(x)\geq 1, \forall x\in(-1,\infty)$.

- Avem $f'(x)=\frac{e^x\,(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ și $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$.

x	-1		0		∞
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Cum $x_0=0$ este punct de minim, rezultă $f(x)\geq f(0)=1$ pentru $\forall x\in(-1,\infty)$.

5) Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Să se demonstreze că $x^e\leq e^x$ pentru orice $x>0$.

- Inegalitatea cerută devine prin logaritmare $e\ \ln x\ \leq x\ \ln e$, sau, cum $x > 0$, obținem $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}$. Stabilim extremele funcției.

  Avem $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$ şi $f'(x) = 0 => x = e$.

x	0				e				∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$			M		$\searrow$		

  Cum $x_0 = e$ este punct de maxim, rezultă $f(x) \leq f(e), \forall x > 0$, deci $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}$ $<=>$ $x^e \leq e^x$.

6) Se consideră $f: R^* \to R, f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

   a) Să se demonstreze că f este descrescătoare pe $(0, 2]$.
   b) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

- a) Avem $f'(x) = \frac{x^2\, e^x - 2xe^x}{x^4} = \frac{x\, e^x\,(x-2)}{x^4}$. Pentru $x \in (0, 2], f'(x) \leq 0$, deci funcția este descrescătoare.
- b) Inegalitatea se poate scrie $\frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{3}}}{3}$, adică $f(\sqrt{2}) \geq f(\sqrt{3})$ adevărat deoarece $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ şi pe intervalul $(0, 2]$ funcția este descrescătoare.

7) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to R, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ pentru orice $x \in [\sqrt{e}, \infty)$.

- Calculăm $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ \ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ \ln x)}{x^4}$ şi $f'(x) = 0 => 1 - 2\ \ln x = 0 =>$ $\ln x=12=>x=e.$

x	0				$\sqrt{e}$				∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$			M		$\searrow$		0

Cum $f'(x) < 0, x \in (0, \infty)$ rezultă f descrescătoare şi deci $f(x) \leq f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2e}$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ şi, aplicând regula lui l'Hospital, rezultă

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

În concluzie, pentru $x \in [\sqrt{e}, \infty)$ rezultă $0 < f(x) \le \frac{1}{2e}$.

8) Se consideră $f: R - \{1\} \to R, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$. Să se demonstreze că funcția admite două puncte de extrem.

- Calculăm $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2)}{(x-1)^2}$, adică $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ cu rădăcinile $x = -1$ şi $x = 3$.

x	$-\infty$		-1		3		∞
$f'(x)$	$+\ +\ +$		0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Din tabelul de variație al funcției, $x_0 = -1$ este punct de minim şi $x_0 = 3$ este punct de maxim, deci funția are exact 2 puncte de extrem.

9) Se consideră $f: R \to R, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției.

- Avem $f'(x) = (2x-2)e^x - (x^2 - 2x + 1)e^x = (x^2 - 1)e^x, f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 1 = 0$ şi $x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$	$+\ +\ +$		0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Din tabelul de variație al funcției, $x_0 = -1$ este punct de maxim, iar $x_0 = 1$ punct de minim, deci funcția are 2 puncte de extrem.

10) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to R, f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.

a) Să se determine punctele de extrem ale funcției.

b) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \le \frac{x^2-1}{4}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- Avem $f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{1}{x} = \frac{x^4-1}{x} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile ± 1, dar $x \in (0, \infty)$, deci convine numai $x = 1$.

x	0		1		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă că f are un unic punct de minim $x_0 = 1$ și avem $f(x) \geq f(1)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, adică $\frac{x^4}{4} - \ln x \geq \frac{1}{4}, \forall x \in (0, \infty)$. Dacă înlocuim x cu $\sqrt{x}$ rezultă $\frac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x} \geq \frac{1}{4}$ sau $\ln\sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}$.

11) Se consideră $f: (0, \infty) \to R, f(x) = x^2 \ln x$. Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ pentru orice $x > 0$.

- Avem $f'(x) = 2x \ \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\,(2\ln x + 1). f'(x) = 0 => x = 0$ care nu convine și $\ln x = -\frac{1}{2}$, de unde $x = e^{-\frac{1}{2}}$ sau $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Tabelul de variație al funcției:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ punct de minim, deci $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Cum $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$, avem că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}, \forall x \in (0, \infty)$.

12) Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = 2^x - x \ \ln 2$. Să se determine punctele de extrem ale funcției.

- Cum $f'(x) = 2^x \ \ln 2 - \ln 2 = (2^x - 1)\ln 2, f'(x) = 0 => \ 2^x = 1$ și $x = 0$. Avem tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

din care rezultă că $x_0 = 0$ este punct de minim.

13) Se consideră $f: R^* \to R, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.

- Avem $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, rezultă $f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot \frac{x^4-1}{x^2} = \frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}$ cu rădăcinile ± 1. Avem

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$	$+ + +$	$0 \; - - -$	$0 \; + + +$	
$f(x)$	$\nearrow$	$M \; \searrow$	$m \; \nearrow$	

Pe $(-\infty, -1), f' > 0$, deci f crescătoare, pe $(-1, 1), f' < 0$, deci f descrescătoare, iar pe $(1, \infty), f' > 0$, deci f crescătoare.

14) Se consideră $f: R \to R, f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se demonstreze că funcția este crescătoare pe R.

- Funcția este este crescătoare pe R dacă $f'(x) > 0, \forall x \in R$. Avem $f'(x) = 3^x \ln 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$. Cum $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, rezultă $f'(x) = 3^x \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2 > 0, \forall x \in R$, deci f este crescătoare pe R.

15) Se consideră $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2-x+1}{e^x}$. Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.

- Calculăm $f'(x) = \frac{(2x-1)e^x - (x^2-x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{(-x^2+3x-2)e^x}{e^{2x}}$ şi $f'(x) = 0$ pentru $-x^2 + 3x - 2 = 0$ cu rădăcinile 1 şi 2. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	1	2	∞
$f'(x)$	$- - -$	$0 \; + + +$	$0 \; - - -$	
$f(x)$	$\searrow$	$m \; \nearrow$	$M \; \searrow$	

Pentru $x \leq 2$ avem $x_0 = 1$ punct de minim, deci $f(x) \geq f(1), \forall x \leq 2$. Cum $f(1) = \frac{1}{e}$, rezultă $f(x) \geq \frac{1}{e}, \forall x \leq 2$.

16) Fie funcția $f: (0, \infty) \to R, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$. Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$ pentru orice $x > 0$.

- Avem $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ cu rădăcina $x = 1$.

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă $x_0 = 1$ punct de minim şi deci $f(x) \geq f(1)$. Cum $f(1) = 2 => 2\sqrt{x} - \ln x \geq 2$ sau $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$.

17) Se consideră funcția $f: (1, \infty) \to R, f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Să se arate că $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

- Avem $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ cu rădăcinile $x = 0$ şi $x = 2$. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	

Pe intervalul $[0, 2], f' < 0$, deci funcția este descrescătoare. Cum $0 < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} < 2$, rezultă $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

18) Se consideră $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2012}\right) < f(\sqrt[3]{2013})$.

- Avem $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^3+x^2+x-1-2x^3+x^2-x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$

cu rădăcinile ± 1.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Pe intervalul $(1, \infty)$ funcția este strict crescătoare. Cum $1 < \sqrt[3]{2012} < \sqrt[3]{2013}$, rezultă $f\left(\sqrt[3]{2012}\right) < f(\sqrt[3]{2013})$..

19) Se consideră $f: (1, \infty) \to R, f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Să se arate că $f(x) \geq e^2$ pentru orice $x > 1$.

- Avem $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ şi din $f'(x) = 0$ rezultă $x = 2$.

x	1		2		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă $x_0 = 2$, punct de minim, deci $f(x) \geq f(2)$ pentru orice $x > 1$.
Cum $f(2) = e^2$, avem $f(x) \geq e^2, \forall x > 1$.

20) Se consideră $f: (0, \infty) \to R, f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$. Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$ pentru orice $x > 0$.

- Avem $f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ cu rădăcina $x = 1$ şi tabelul de variație

x	0		1		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Rezultă $x_0 = 1$ este punct de minim şi deci $f(x) \geq f(1)$ pentru orice $x > 0$.
Cum $f(1) = 0$, avem $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, adică $x + 2 \geq 3\sqrt[3]{x}$ şi $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}, \forall x > 0$.

21) Se consideră $f: R \to R, f(x) = e^x - x - 1$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.
b) Să se arate că $e^{2012} - 1 \geq 1006 \cdot 2012\,(e - 1)$.

- a) Cum $f'(x) = e^x - 1$ cu rădăcina $x = 0$, avem tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

  Pe intervalul $(-\infty, 0), f' < 0$, deci f descrescătoare, iar pe $(0, \infty)$, $f' > 0$, deci f crescătoare.

- b) Cum $x_0 = 0$ este punct de minim, rezultă $f(x) \geq f(0) = 0$ pentru orice $x \in R$ şi deci $e^x - x - 1 \geq 0$, adică $e^x \geq x + 1$ pentru orice $x \in R$ sau, pentru $x = k$, $e^k \geq k + 1$ pentru orice $k \in N$. Dăm lui k valori de la 0 la 2011 şi însumăm.

Obținem:

$$\sum_{k=0}^{2011} e^k \geq \sum_{k=0}^{2011} (k+1)$$

Cum prima sumă este suma unei progresii geometrice cu 2012 termeni, $a_1 = 1$ şi $q = e$, rezultă $\frac{e^{2012}-1}{e-1} \geq \frac{2012 \cdot 2013}{2}$ sau $e^{2012} - 1 \geq 1006 \cdot 2013(e-1)$ deoarece $e - 1 > 0$.